

Tapered Quartered Wave Tube

Charge accordée en quart d'onde  
Ligne de transmission acoustique

Boris SNAPIR

Avril 2008

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>7</b>
1.1	Différents types de charge acoustique pour un haut-parleur . . . . .	7
1.2	Principe du fonctionnement . . . . .	7
1.3	Quelques enceintes renommées . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Construction d'un prototype de base et mise en place des premières équations</b>	<b>12</b>
2.1	Mise en œuvre du prototype - Mesures réalisées . . . . .	13
2.2	Démarche de calcul . . . . .	15
2.3	Fonctionnement du Haut-parleur électrodynamique . . . . .	17
2.4	Équivalence des différents éléments dans les 3 systèmes . . . . .	20
2.5	Haut-parleur chargé par la colonne . . . . .	21
2.5.1	Schémas équivalents . . . . .	21
2.5.2	Expression de l'impédance électrique du système . . . . .	22
2.6	Charge acoustique dans le cadre d'une colonne d'air de section constante . . . . .	23
2.6.1	Matrice de transfert . . . . .	23
2.6.2	Impédance à l'extrémité ouverte de la Ligne (Impédance de rayonnement)	28
2.6.3	Pertes par effets visco-thermiques . . . . .	29
2.6.4	Graphe de l'impédance acoustique . . . . .	30
2.7	Niveaux de pression acoustique à distance de l'enceinte . . . . .	31
2.8	Équations finales et graphes . . . . .	32
2.8.1	Graphe de l'Impédance électrique . . . . .	32
2.8.2	Graphe des niveaux de pression acoustique à distance . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Autres Géométries</b>	<b>36</b>
3.1	Formes coniques . . . . .	36
3.2	Colonne avec évent . . . . .	44
3.3	Influence du placement de l'haut-parleur sur la ligne . . . . .	49
3.4	Comparatif des différentes formes géométriques . . . . .	51
3.4.1	Forme droite . . . . .	51
3.4.2	Forme évasée . . . . .	51
3.4.3	Introduction à la théorie des Pavillons . . . . .	52
3.4.4	Forme convergente . . . . .	53
3.4.5	Forme droite avec évent . . . . .	54
3.4.6	Étude de la charge Bass-reflex alignée selon un filtre Butterworth d'ordre 4	55

<b>4</b>	<b>Rôle d'un matériau amortissant</b>	<b>61</b>
4.1	Historique . . . . .	61
4.1.1	Modèle de Bailey (1965) . . . . .	61
4.1.2	Modèle de Bradbury (1976) . . . . .	61
4.1.3	Le modèle d'AUGSPURGER (2000) . . . . .	63
4.1.4	Modèle de M.J. KING . . . . .	63
4.2	Modèle utilisé dans notre étude . . . . .	65
4.2.1	Modélisation par discrétisation . . . . .	65
4.2.2	Caractéristiques des matériaux fibreux . . . . .	67
4.2.3	Modèle utilisé avec fibres absorbantes . . . . .	68
4.2.4	Commentaires sur l'Impédance acoustique de la ligne avec absorbant . . .	69
4.2.5	Détermination des paramètres . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Deux formes optimisées</b>	<b>74</b>
5.1	Colonne droite . . . . .	75
5.2	Colonne évasée terminée par un événement . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>78</b>
<b>7</b>	<b>Feuille de calcul pour élaborer une charge accordée en quart d'onde</b>	<b>79</b>

# Table des figures

2.1	Photo du prototype . . . . .	13
2.2	Schéma du microphone . . . . .	14
2.3	Schéma d'un haut-parleur et de ses composants . . . . .	17
2.4	Courbe d'impédance électrique du haut-parleur nu . . . . .	22
2.5	Courbe d'impédance électrique du haut-parleur monté sur une colonne droite . . . . .	32
2.6	Mise en parallèle de l'impédance du haut-parleur et de la colonne . . . . .	33
2.7	Colonne droite : SPL extrémité ouverte et haut-parleur . . . . .	34
2.8	Colonne droite : SPL total . . . . .	35
3.1	Colonne évasée : Impédance acoustique . . . . .	41
3.2	Colonne évasée : SPL extrémité ouverte . . . . .	41
3.3	Colonne convergente : Impédance acoustique . . . . .	42
3.4	Colonne convergente : SPL extrémité ouverte . . . . .	42
3.5	Impédance acoustique d'une colonne avec évent . . . . .	44
3.6	Comparatif des niveaux de pression en bout de ligne avec et sans évent . . . . .	45
3.7	SPL total : Haut-parleur positionné au niveau de l'extrémité fermée . . . . .	49
3.8	SPL total : Haut-parleur décalé à 1/3 de l'extrémité fermée . . . . .	50
3.9	Schéma d'une enceinte bass-reflex . . . . .	55
3.10	Bass-reflex : circuit électrique équivalent à basses fréquences . . . . .	55
3.11	Bass-reflex : circuit acoustique équivalent à basses fréquences . . . . .	56
3.12	Tableau comparatif des différentes formes . . . . .	59
4.1	Modèle d'AUGPURGER . . . . .	63
4.2	Vitesse de propagation en fonction de la quantité de matériau fibreux utilisée . . . . .	64
4.3	Modèle sans absorbant . . . . .	65
4.4	Modèle avec fibres (mécanique) . . . . .	68
4.5	Modèle avec fibres (acoustique) . . . . .	68
5.1	Forme droite optimisée . . . . .	75
5.2	Forme évasée optimisée . . . . .	76

# Symboles utilisés

$\Delta_z$  : longueur de colonne utilisée pour le calcul par discrétisation

$\gamma$  : constante de propagation complexe

$\gamma_a$  : rapport des chaleurs massiques

$\lambda$  : longueur de l'onde acoustique

$\mu$  : coefficient de viscosité de l'air =  $1.81 * 10^{-5} kg/(msec)$

$\rho_f$  : densité de la fibre composant le matériau amortissant

$Bl$  : champ magnétique du haut-parleur

$c$  : vitesse du son en  $m/s$

$c_{a1}$  : compliance acoustique de l'air contenu dans chaque segment  $\Delta_z$

$c_f$  : compliance acoustique des fibres

$c_{mf}$  : raideur mécanique des fibres

$C_{ms}$  : raideur mécanique de l'équipage mobile du haut-parleur

$f_0$  : fréquence de résonance du haut-parleur

$G()$  : fonction de transfert dans le cadre d'un bass-reflex

$L$  : longueur de la colonne d'air

$L_e$  : inductance de la bobine du haut-parleur

$l_e$  : longueur de l'évent

$M_{a1} = Z_{AL}$  : impédance acoustique à l'avant de la ligne

$m_{a1}$  : masse acoustique de l'air contenu dans chaque segment  $\Delta_z$

$m_{mf}$  : masse des fibres

$M_{ad}$  : masse acoustique de la membrane du haut-parleur

$M_{ap}$  : masse acoustique du port (évent)

$M_{ms}$  : masse de l'équipage mobile du haut-parleur

$P$  : pression

$P(x, t)$  : pression à l'instant  $t$ , à la distance  $x$

$P_{0+}$  : pression onde aller

$P_{0-}$  : pression onde retour

$P_D$  : taux de remplissage en  $Kg/m^3$  du matériau amortissant utilisé

$P_{in}$  : pression en entrée de ligne

$P_L$  : pression en sortie de ligne

$q$  : débit

$q_{in}$  : débit en entrée de ligne

$q_L$  : débit en sortie de ligne

$Q_{ms}$  : coefficient de surtension mécanique du haut-parleur

$Q_{es}$  : coefficient de surtension électrique du haut-parleur

$R_a$  : résistance acoustique

$R_e$  : résistance électrique de la bobine du haut-parleur

$R_f$  : résistance des fibres à l'écoulement de l'air, elle s'exprime en  $Nsm^{-4}$

$R_{ms}$  : résistance mécanique de l'équipage mobile du haut-parleur

$Q_{ts}$  : coefficient de surtension total du haut-parleur

$r$  : rayon de la membrane du haut-parleur

$r_{mf}$  : raideur mécanique des fibres

$S_d$  : surface de la membrane du haut-parleur

$S_e$  : section de l'évent

$S(x)$  : surface de la colonne au point d'abscisse  $x$

$v_f$  : vitesse de déplacement des fibres composant le matériau absorbant

$Z_c$  : impédance caractéristique du milieu

$Z$  : impédance

$Z_{AL} = M_{a1}$  : impédance acoustique à l'avant de la ligne

$Z_{in}$  : impédance acoustique à l'entrée de la colonne (ligne)

$Z_m$  : impédance mécanique du haut-parleur

# 1 Présentation du problème

## 1.1 Différents types de charge acoustique pour un haut-parleur

Une enceinte acoustique a pour but d'améliorer le rayonnement acoustique en évitant le court-circuit acoustique.

La charge d'un Haut Parleur par une enceinte close améliore déjà le rendement d'environ 30%. L'inconvénient de l'enceinte close est d'augmenter le coefficient de raideur de la membrane et donc de diminuer la réponse dans les basses

Certaines charges tentent en outre de récupérer une partie de l'onde arrière dans les basses fréquences en ayant recours à un résonateur couplé :

- Parallèlement à la charge la plus connue bass-reflex (qui utilise le principe du résonateur d'Helmutz,
- L'une d'entre elle d'idée ancienne, réapparaît régulièrement avec des améliorations successives : *la ligne acoustique accordée en quart d'onde*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Transducteur dans enceinte} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{- Séparation Avant/Arrière} \\ \text{- Récupération onde arrière} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Baffle infini} \\ \text{Enceinte close} \\ \text{résonateur bass reflex} \\ \text{résonateur colonne d'air} \end{array} \right.$$

## 1.2 Principe du fonctionnement

- C'est en 1930 (date à laquelle THURAS déposait son brevet concernant l'enceinte bass reflex) que Paul Voigt, alors ingénieur de la firme Edison Bell, propose dans la revue Wireless word une enceinte accordée en quart d'onde .

Paul Voigt était déjà l'inventeur du pavillon TRACTRIX, il s'intéressait à cette époque à un modèle d'orgue électronique.

L'idée était de charger le haut parleur par une colonne accordée sur la fréquence de résonance du haut-parleur.

Fondamentalement, la raison d'être est qu'à l'époque, les équipages mobiles étaient légers pour avoir du rendement, et avaient donc besoin d'être freinés.

En opposant au transducteur l'anti-résonance d'une colonne d'air accordée en quart d'onde, on

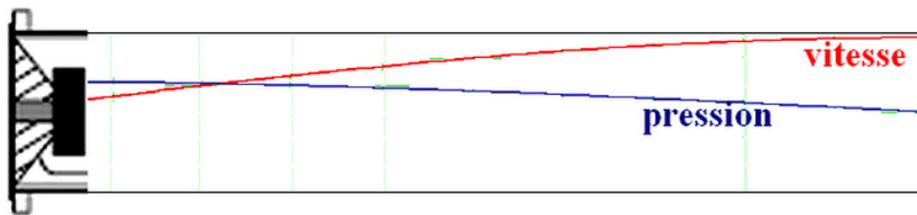
limite ainsi l'excursion du haut-parleur.

Mais on remarquera également que l'on abaisse la fréquence de résonance selon le principe masse-ressort. C'est donc également une *enceinte à résonateur*.

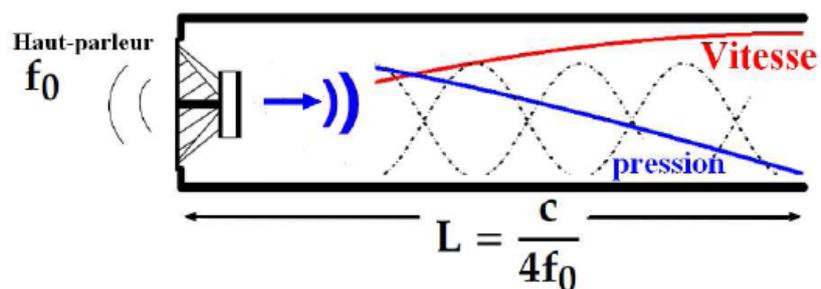
La longueur de la colonne se calcule donc de cette façon :

$$L = \frac{c}{4f_0} \quad (1.1)$$

$f_0$  étant la fréquence de résonance du haut-parleur



- Côté haut-parleur la pression de l'onde sonore est maximale alors que la vitesse est minimale
- Côté extrémité ouverte à 1/4 de longueur d'onde, nous obtenons un ventre de vitesse alors que la pression  $\sim$  Pression atmosphérique.
- L'inconvénient est qu'en raison des conditions aux limites, une colonne génère des *ondes stationnaires* (que l'on devra chercher à atténuer)).



- Nous verrons que le résonateur en quart d'onde peut être assimilé à un "*transformateur - adaptateur d'impédance acoustique en bande étroite, centrée sur la fréquence de résonance et ses multiples*"

### 1.3 Quelques enceintes renommées

Depuis 1930, ce type de montage a régulièrement donné lieu à des améliorations et a permis la réalisations de quelques enceintes renommées.

– **1930 : Le modèle initial de Paul Voigt.**

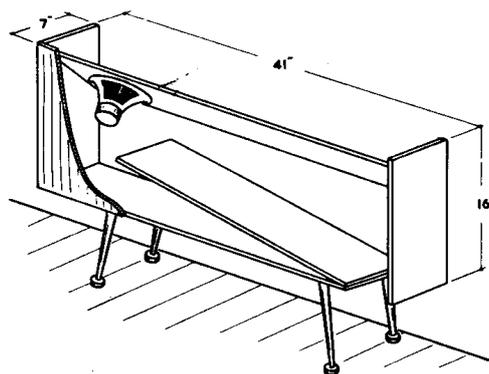
Initialement l'enceinte de Paul Voigt était droite sans amortissant.



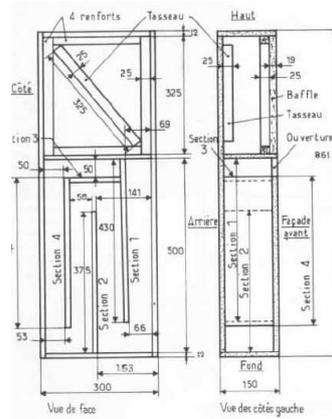
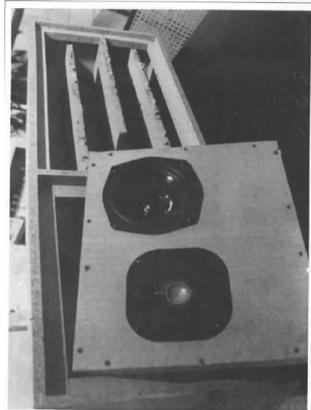
Par la suite diverses améliorations ont été apportées soit sur la géométrie, soit par l'ajout d'amortissant interne

– La forme conique a notamment été proposée à partir des années 60

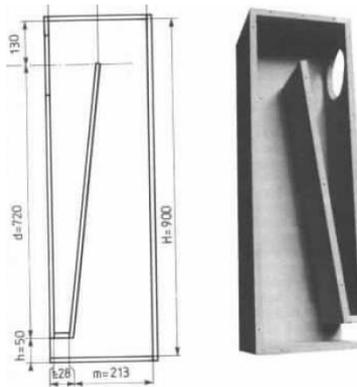
– **1963** L'enceinte Paraline proposée par Baldock



– **1980** L'enceinte Daline (Decoupled antiresonant Line), enceinte labyrinthique proposée par Jacques Mahul (société Focal), qui avec un haut-parleur de 5 pouces, permet de descendre à 40Hz à -3db



- **1986** Enceinte de forme TQWT. Haut-parleur de marque Triangle proposée par Gérard Chrétien dans la revue de l'Audiophile



- Beaucoup plus récemment des applications dans le Home cinema avec le "Wave Cannon" de Bose (20hz à partir d'un tube de 3,81m de long)



- La très célèbre enceinte Nautilus



Il y a eu jusqu'à présent très peu de publications scientifiques. Les préconisations pour élaborer de telles enceintes sont restées longtemps empiriques, c'est une charge acoustique qui longtemps a eu la réputation d'être difficile à mettre en oeuvre.

L'objet de cette étude est de faire le point tout en élaborant pas à pas un modèle mathématique fiable.

- Dans le chapitre suivant, nous présenterons un prototype simple permettant de mettre en évidence le fonctionnement et de poser les premières équations.
- Dans un troisième chapitre, nous comparerons différentes géométries.  
Nous serons amenés à étudier les éventuelles analogies et différences avec d'autres types de charge (notamment pavillonnaires et bass-reflex).  
Le bass reflex est également un système accordé en bande étroite, mais sur une seule fréquence.
- Dans le quatrième chapitre nous étudierons l'incidence d'un matériau absorbant sur les ondes stationnaires, ce qui nous amènera à proposer un nouveau modèle mathématique.
- Enfin dans un dernier chapitre, nous serons en mesure de tenter deux nouvelles constructions optimisées pour le haut-parleur utilisé tout au long de cette expérimentation.

## 2 Construction d'un prototype de base et mise en place des premières équations

Rappelons le principe : L'onde se déplace sous forme de ventres et de nœuds. On souhaite obtenir en sortie de colonne un nœud de vitesse à la fréquence envisagée (la plus basse possible en principe aux alentours de la fréquence de résonance de la membrane du haut-parleur).

Pourquoi un nœud de vitesse, car nous verrons que le niveau sonore exprimé en décibels (pression acoustique exercée sur le micro ou sur l'oreille) est directement proportionnel à la vitesse de l'onde acoustique.

Nous allons donc dans un premier temps construire un prototype de base pour mettre en évidence le phénomène, et nous chercherons à établir les équations qui permettent de modéliser le système.

Puis l'étude sera poursuivie par des montages plus complexes en faisant évoluer à chaque fois notre modèle mathématique.

Toutes les expériences ont été faites avec un petit haut parleur bas médium récupéré d'une enceinte ordinaire. Il ne présente pas de caractéristiques spécifiques pour ce type de charge. Il s'agit du haut-parleur de marque **Focal** de référence **5k3211b**.

## 2.1 Mise en œuvre du prototype - Mesures réalisées

Le haut-parleur présente une fréquence de résonance  $f_0$  de 55 hertz. On le monte à l'extrémité d'une colonne de section constante  $16 \times 40 \text{ cm}^2$  (section choisie de façon arbitraire), et de longueur  $L = c/4f_0$  soit  $L = 1;5m$ .

On injecte aux bornes du haut-parleur un signal sinusoïdal d'une fréquence allant de 20 à 1000 Hertz (ce type d'expérience sera répété pour chaque nouvelle construction).

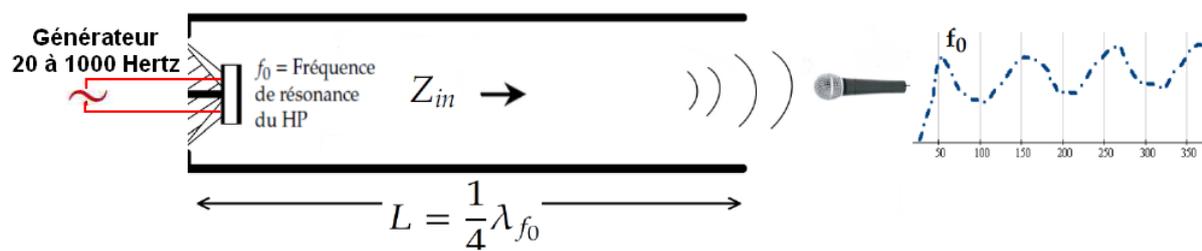


Fig. 2.1 – Photo du prototype

À l'écoute, avant même toutes mesures, nous avons manifestement un son qui descend d'avantage dans les graves qu'à l'air libre, mais nous avons également des pics d'amplitude sonore à intervalles de fréquence réguliers (en raison de la production d'ondes stationnaires).

Pour chaque construction, nous effectuerons 2 types de mesures :

- Des mesures de niveau de pression acoustique avec un microphone à electret muni d'un capteur sensible aux variations de pression, et qui permettra de mesurer les niveaux de pression à distance de la source sonore. C'est bien sûr cet élément là qui intéresse en premier lieu l'utilisateur.

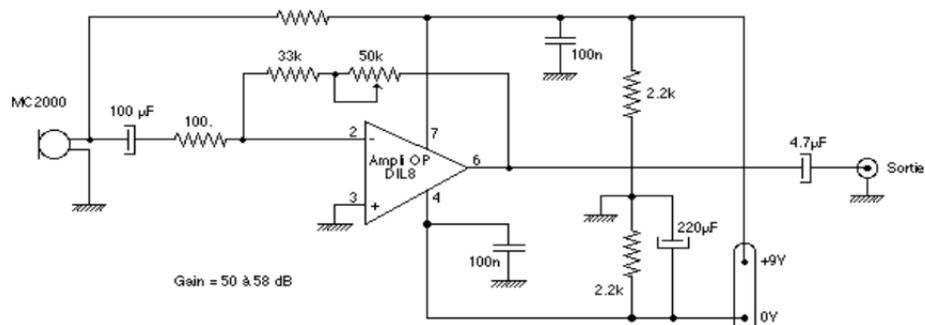
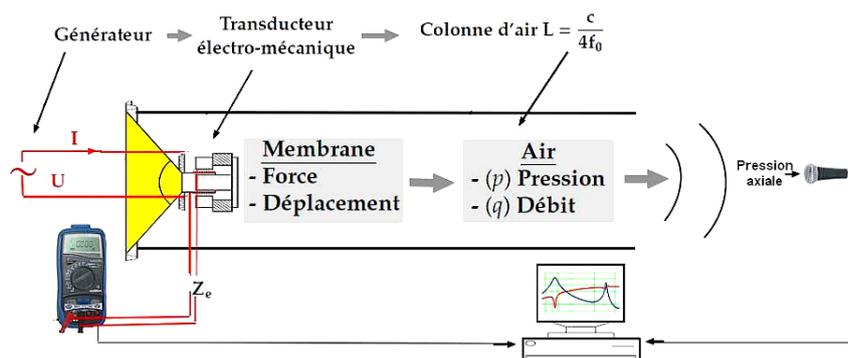


Fig 2.2 – Schéma du microphone

- Des mesures électriques : à l'aide d'un multimètre nous mesurerons l'impédance électrique aux bornes du haut-parleur chargé afin de tracer la courbe en fonction de la fréquence du signal injecté. Ces mesures de l'impédance faciles à réaliser nous fourniront également des éléments très intéressants pour la compréhension du fonctionnement.



## 2.2 Démarche de calcul

Quelles sont les équations qui peuvent modéliser ce système ?

### Fonctionnement du haut-parleur

Nous étudierons en premier lieu le fonctionnement du haut-parleur avec le rôle et la fonction de ses principaux éléments électriques et mécaniques.

### Équivalences entre les systèmes

Nous sommes confrontés au passage dans différents système électrique, mécanique et acoustique. Nous avons donc :

- ★ Une source électrique, délivrant par convention 1 watt sous 8 ohms
- ★ Un transducteur électroacoustique : le haut-parleur
- ★ La charge acoustique du haut-parleur qui se compose :
  - de la colonne d'air couplée à l'arrière,
  - du rayonnement de la membrane vers l'avant.

Pour clarifier les idées, nous aurons à rappeler quelques équivalences entre système électrique, système mécanique, système acoustique :

- **Système électrique** → **Système mécanique** :  
Nous avons l'équivalence Tension/Courant → Force / Vitesse
- **Système mécanique** → **Système acoustique** :  
Nous avons l'équivalence Force/Vitesse → Pression / Débit

### Impédance de charge - Matrice de transfert

La membrane du haut-parleur déplace donc une certaine masse d'air à l'avant et à l'arrière la colonne d'air. Cette colonne d'air caractérise la charge du haut-parleur, charge que nous appellerons impédance d'entrée  $Z_{in}$  :

$$Z_{in} = \frac{P_{in}}{q_{in}} \quad (2.1)$$

Alors que nous avons en sortie de colonne une impédance de rayonnement  $Z_L$  :

$$Z_L = \frac{P_L}{q_L} \quad (2.2)$$

On peut également caractériser la colonne par sa matrice de transfert. Effectivement la charge transforme le rapport Pression/débit en entrée par un nouveau rapport Pression/débit en sortie.

$$\begin{bmatrix} P_{in} \\ q_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_L \\ q_L \end{bmatrix}$$

### Impédance de sortie - Pertes visco-thermiques

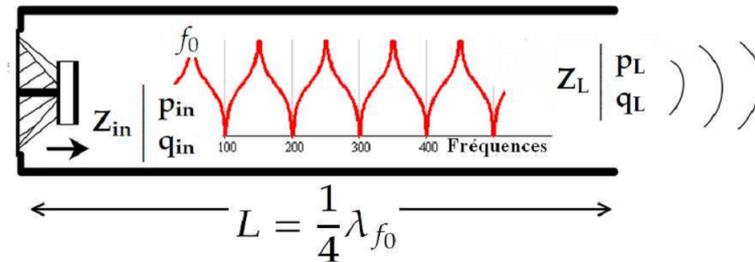
Pour être précis, nous aurons donc également à exprimer l'impédance  $Z_L$  existant à la sortie de la colonne d'air, ainsi que les pertes visco-thermiques.

### Expression des niveaux de pression acoustique à distance

Enfin en fonction du débit de sortie nous pourrions évaluer les niveaux de pression à distance, c'est à dire ce que l'oreille perçoit.

On appellera condition d'approximation basses fréquences ABF, lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  pourra être considérée suffisamment grande devant la longueur de la colonne de telle sorte que l'on puisse poser l'approximation :  $\tan kL \sim kL$ .

Résumons :



- L'élément caractéristique de notre construction TQWT est représenté par son impédance de charge  $Z_{in}$
- Avec l'impédance de charge et les paramètres de Thiele et Small du haut-parleur, nous pourrions exprimer le débit  $q_{in}$  occasionné par la membrane du haut parleur.
- A partir de ce débit à l'arrière de la membrane, connaissant les caractéristiques de la matrice de transfert de la colonne d'air, et l'impédance en sortie de colonne, nous pourrions connaître la valeur du débit  $q_L$  occasionné en sortie de colonne
- A partir de ce débit en sortie de colonne, nous pourrions trouver le niveau de pression acoustique engendré à distance du haut-parler.

## 2.3 Fonctionnement du Haut-parleur électrodynamique

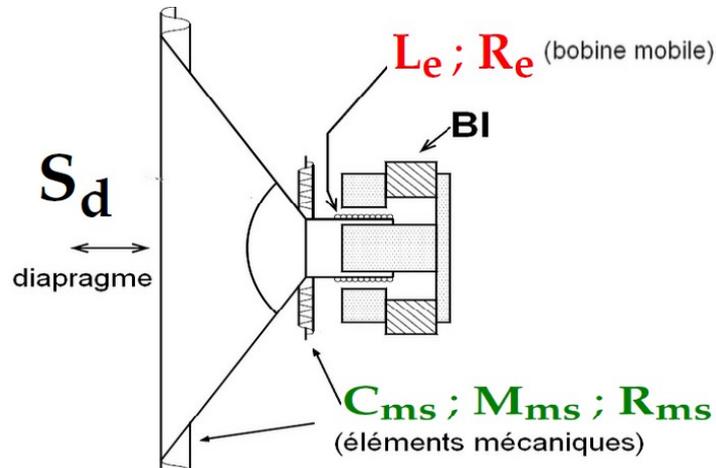


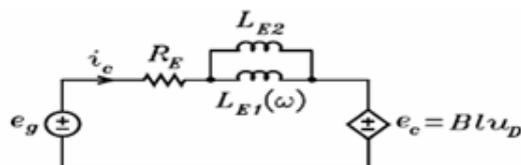
Fig 2.3 – Schéma d'un haut-parleur et de ses composants

Nous utilisons un haut-parleur électrodynamique. Le haut-parleur électrodynamique est constitué :

- d'éléments mécaniques (équipement mobile de masse  $M_{ms}$  avec une membrane considérée plane de surface  $S_d$ , de résistance  $R_{ms}$ , et de raideur  $C_{ms}$ )

- et d'éléments électriques (inductance  $L_e$  et résistance  $R_e$ . Par la suite et pour simplifier les calculs nous utiliserons  $L_e$ .

pour exprimer l'inductance de la bobine, mais précisons qu'en fait elle peut être modélisée par 2 inductances en parallèle :



L'une étant sans pertes ( $L_{e2}$ ), l'autre étant avec pertes, et dépendante de la fréquence, une bonne approximation de l'impédance de cette dernière étant obtenue par  $Z_{e1}(\omega) = (j\omega)^{ne} L_e$ .

La membrane de masse  $M_{ms}$  est solidaire de la bobine ( $N$  spires de résistance  $R_e$  et d'inductance  $L_e$  qui plonge dans l'entrefer d'un aimant permanent créant un champ radial constant  $B$ .

Nous utilisons un haut-parleur de marque Focal de référence 5k3211b, dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$L_e = 0,63mH, R_e = 6,7ohms, f_s = 55hz$$

$$Bl = 5,7N/amp, S_d = 86.6cm^2$$

$$M_{ms} = 6,7g, C_{ms} = 130 * 10^{-5} N/m, R_{ms} = 651g/s$$

On a l'habitude également d'exprimer les éléments suivants :

- le coefficient de surtension mécanique  $Q_{ms} = \frac{1}{R_{ms}} \sqrt{\frac{M_{ms}}{C_{ms}}} = \frac{1}{R_{as}} \sqrt{\frac{M_{as}}{C_{as}}}$
- le coefficient de surtension électrique :  $Q_{es} = \frac{R_e}{Bl^2} \sqrt{\frac{M_{ms}}{C_{ms}}}$
- Le coefficient de surtension total :  $Q_{ts} = \frac{Q_{ms} Q_{es}}{Q_{ms} + Q_{es}}$

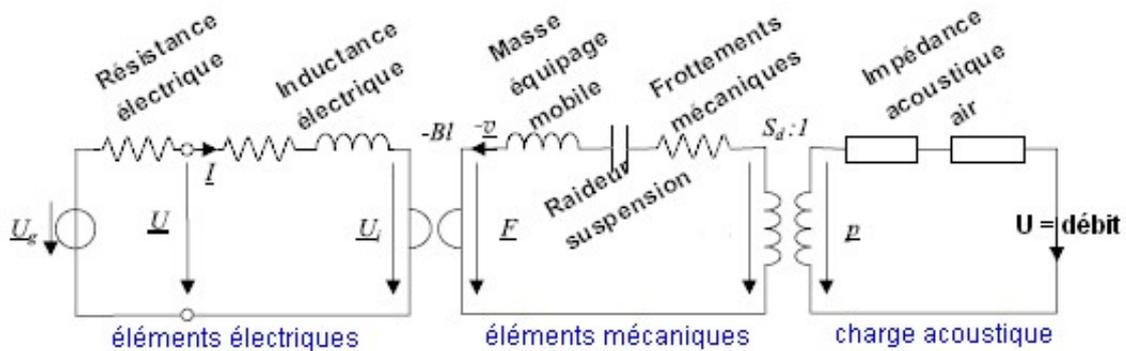
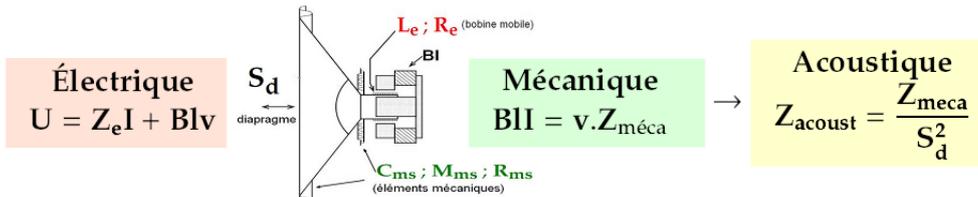
Sous l'action du courant délivré par l'ampli, l'équipage mobile est soumis à :

- une force de Laplace :  $\vec{F} = l \vec{i} \wedge \vec{B}$

Sous l'action de cette force, la bobine se déplace en coupant les lignes de flux, d'où :

- une f.e.m. induite :  $\vec{\mathcal{E}} = l \vec{v} \wedge \vec{B}$

La transduction nous amène à étudier le couplage *électromagnétique*, et *mécanique acoustique*. **Bl** et **S<sub>d</sub>** en sont respectivement les éléments de couplage.



Couplage mécanique-électrique :  $\begin{cases} F = Bli \\ v = Bl.U_{hp} \end{cases}$       Couplage acoustique-mécanique  $\begin{cases} p = F/S_d \\ q = S_d/v \end{cases}$

L'impédance électrique peut s'écrire sous la forme

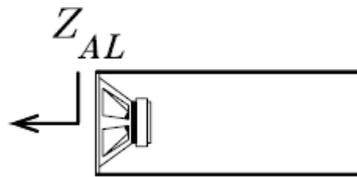
$$Z_e = R_e + j\omega L_e + \frac{Bl^2}{Z_m} \quad (2.3)$$

$Z_m$  étant l'impédance mécanique chargée par la membrane (qui peut également s'écrire comme le produit de l'impédance acoustique et du carré de la surface :  $Z_m = Z_{ac} * S_d^2$ ).

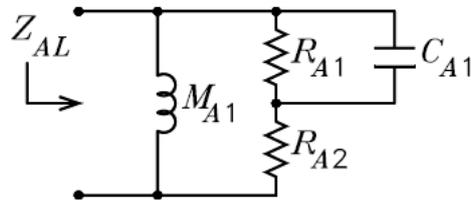
Le terme  $Bl^2/Z_m$  résulte du déplacement de l'équipage mobile. C'est l'**impédance motionnelle** du haut-parleur

En termes mécaniques, le fluide ambiant s'oppose au mouvement de la membrane.

A l'impédance mécanique du piston vient s'ajouter, à l'arrière l'impédance d'entrée de la colonne, mais également à l'avant l'impédance de rayonnement  $Z_{AL}$



Cette impédance peut être modélisée de la façon suivante :



Mais pour simplifier les calculs, on considèrera à la suite des travaux de Beranek [5] que

$$Z_{AL} = M_{a1} = \frac{8\rho}{3\pi^2 r} \quad (2.4)$$

est une bonne approximation.

On remarquera que la valeur de  $\frac{8\rho}{3\pi^2 r} \cdot S_d^2$  est faible au regard de celle  $M_{ms}$ , ce qui explique que la somme de ce deux valeurs est souvent confondue avec  $M_{ms}$  dans les données du constructeur.

## 2.4 Équivalence des différents éléments dans les 3 systèmes

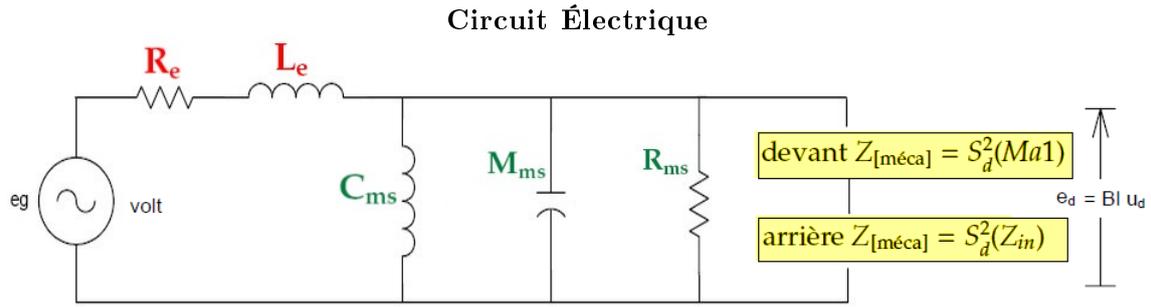
- Le 1° indice correspond au système (*e* pour électrique, *m* pour mécanique, *a* pour acoustique).
- Le 2° indice désigne l'élément mécanique (*s* pour suspension, *m* ou *d* pour membrane ou diaphragme, *r* pour résistance au frottement).
- En *rouge*, les composants électriques, en *vert* les composants mécaniques, en *jaune-marron* l'impédance de l'air.

	Système électrique	Système mécanique	Système acoustique
	Tension / Courant	Force / Vitesse	Pression / Débit
Résistance bobine	<b><math>R_e</math></b>	$R_{me} = \frac{Bl^2}{R_e}$	$R_{ae} = \frac{Bl^2}{S_d^2(R_e + j\omega L_e)}$
Bobine électrique	<b><math>L_e</math></b>	$\frac{Bl^2}{L_e}$	$\frac{Bl^2}{S_d^2 L_e}$
Résistances mécaniques	$R_{es} = \frac{Bl^2}{S_d^2 R_{as}} = R_e \frac{Q_{ms}}{Q_{es}}$	<b><math>R_{ms}</math></b> $\left( = \frac{Bl^2}{R_e} \cdot \frac{Q_{es}}{Q_{ms}} \right)$	$R_{as} = \frac{R_{ms}}{S_d^2}$
Raideur suspension	$L_{es} = C_{as} \frac{Bl^2}{S_d^2}$	<b><math>C_{ms}</math></b> $\left( = \frac{L_{es}}{Bl^2} \right)$	$C_{as} = C_{ms} S_d^2$
Masse équipement mobile	$C_{es} = \frac{M_{ms}}{Bl^2}$	<b><math>M_{ms}</math></b> $(= S_d^2 M_{as})$	$M_{as} = M_{ad} + 1 \frac{8\rho}{3\pi^2 r} = \frac{M_{ms}}{S_d^2}$
Impédance colonne	$Z_{ec} = \frac{Bl^2}{S_d^2 Z_{in}}$	$Z_m = S_d^2 Z_{in}$	<b><math>Z_{in}</math></b>

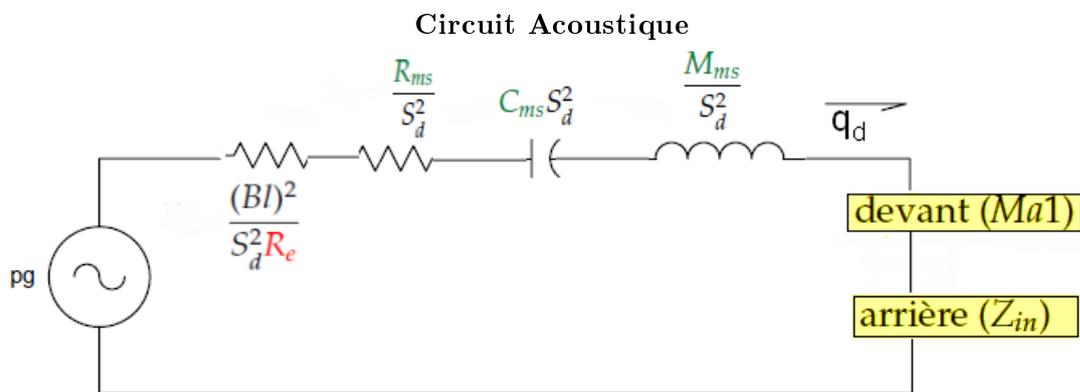
## 2.5 Haut-parleur chargé par la colonne

### 2.5.1 Schémas équivalents

Les schémas équivalents électrique et acoustique permettent de mieux mettre en évidence l'expression de l'impédance électrique et du débit d'air de la membrane



$$Z_e = R_e + j\omega L_e + \frac{(Bl)^2}{[(j\omega C_{ms})^{-1} + j\omega M_{ms} + R_{ms}] + j\omega S_d^2 \left( \frac{8\rho}{3\pi^2 r} \right) + S_d^2 Z_{in}} \quad (2.5)$$



$$q_d = \frac{P_g}{\frac{Bl^2}{S_d^2 R_e} + \frac{R_{ms}}{S_d^2} + j\omega C_{ms} S_d^2 + j\omega \frac{M_{ms}}{S_d^2} + j\omega Ma1 + Z_{in}} \quad (2.6)$$

En considérant un haut-parleur chargé à l'arrière par une impédance  $Z_{in}$ , nous avons donc les 2 équations fondamentales qui permettent de déterminer :

- L'impédance électrique d'un haut-parleur chargé à l'arrière par une impédance  $Z_{in}$
- Le débit du haut-parleur chargé à l'arrière par une impédance  $Z_{in}$

Ces 2 termes étant donc bien sûr fonction des caractéristiques du haut-parleur

## 2.5.2 Expression de l'impédance électrique du système

Nous avons vu que :

$$Z_e = R_e + j\omega L_e + \frac{(Bl)^2}{[(j\omega C_{ms})^{-1} + j\omega M_{ms} + R_{ms}] + S_d^2 \left( \frac{8\rho}{3\pi^2 r} \right) + S_d^2 Z_{in}}$$

soit pour un haut-parleur monté en baffle infini :

$$Z_e = R_e + j\omega L_e + \frac{(Bl)^2}{[(j\omega C_{ms})^{-1} + j\omega M_{ms} + R_{ms}] + S_d^2 \left( \frac{8\rho}{3\pi^2 r} \right)}$$

**Quelques remarques sur la courbe d'impédance du HP nu.**

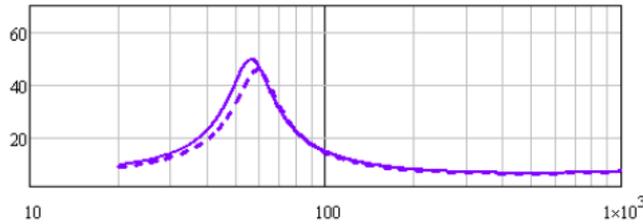


Fig 2.4 – Courbe d'impédance électrique du haut-parleur nu

(trait plein : courbe d'après le modèle ; trait pointillé : courbe d'après les mesures)

A partir de cette courbe, on peut retrouver :

1. La résistance  $R_e$  du bobinage (ordonnée du point le plus bas),
2. Son inductance, compte tenu qu'à la fréquence de coupure (à droite) l'impédance motionnelle est négligeable, la valeur  $|Z_e|$  devient  $|Z_e| = \sqrt{R_e^2 + L_e\omega^2}$ ,
3. La résistance au frottement mécanique  $R_{ms}$  ; le sommet de la première bosse correspond à la résonance mécanique de l'équipage mobile, d'où en ce point  $Z_e = R_e + \frac{(Bl)^2}{R_{ms}}$ .

Quant à la masse de l'équipage mobile, on la détermine habituellement par la technique de la masse additionnelle.

Dans le cadre de notre prototype (une colonne droite de section constante, nous allons maintenant exprimer et calculer la matrice de transfert et l'impédance acoustique de charge ( $Z_{in}$ ).

Dans tous les calculs qui suivent, on supposera le fluide parfaitement homogène, isotrope et sans viscosité.

## 2.6 Charge acoustique dans le cadre d'une colonne d'air de section constante

### 2.6.1 Matrice de transfert

A partir de l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.7)$$

que l'on dérive par rapport à  $x$   
et de l'équation de continuité :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \rho \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.8)$$

que l'on dérive par rapport au temps,

On obtient : 
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \end{array} \right. \rightarrow \text{i.e. l'équation d'ondes : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \mathbf{t}^2} = \mathbf{c}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}^2} \end{array} \right. .$$

Équation valable tant pour la Pression que pour la vitesse.

Ces équations ont pour solution :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{A}e^{j\omega t - jkx} + \mathbf{B}e^{j\omega t + jkx} \quad (2.9)$$

se composant d'une onde aller et d'une onde retour,  $A$  et  $B$  dépendent des conditions aux limites,

On peut réécrire de façon plus explicite :

$$P(x, t) = P_{0+}e^{j\omega t - jkx} + P_{0-}e^{j\omega t + jkx} \quad (2.10)$$

avec  $P_{0+}$  et  $P_{0-}$  qui représentent respectivement l'amplitude en pression de l'onde aller et de l'onde retour

Puis par dérivation, et intégration avec l'équation d'Euler, on obtient l'expression de la vitesse :

$$V(x, t) = \frac{1}{\rho c} [P_{0+}e^{j\omega t - jkx} - P_{0-}e^{j\omega t + jkx}] \quad (2.11)$$

(On omet par la suite le terme  $j\omega t$  pour simplifier l'écriture)

### Ondes Planes Progressives :

Si le tuyau était idéalement infini, il n'y aurait pas de réflexion, les ondes seraient de nature progressive. Les expressions relatives à la Pression et la Vitesse se limiteraient au premier terme, et nous aurions une impédance acoustique (rapport Pression sur Débit) strictement réelle et ne dépendant que des caractéristiques du milieu (impédance caractéristique) :

$$\text{Tuyau idéalement infini : } Z_c = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \frac{\rho c}{S}$$

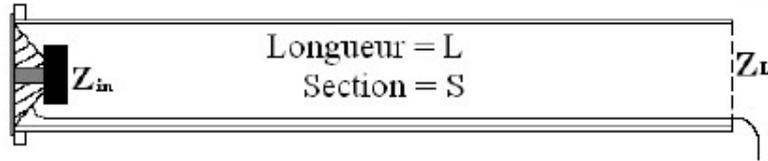
$$Z_c = \frac{P}{U} = \frac{\rho c P_{0+} e^{-jkx}}{S P_{0+} e^{-jkx}} = \frac{\rho c}{S} \quad (2.12)$$

Et on appelle impédance spécifique :

$$Z_{\text{spécifique}} = \rho c \simeq 430 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s}) \quad (2.13)$$

### Ondes aller plus ondes retour

Mais notre colonne est de dimension finie, et à l'extrémité se produit une rupture de continuité qui va donc générer (au moins en partie) une réflexion des ondes acoustiques.



$$P(L, t) = P_{0+} e^{j\omega t - jkL} + P_{0-} e^{j\omega t + jkL} \quad (2.14)$$

$$V(L, t) = \frac{1}{\rho c} [P_{0+} e^{j\omega t - jkL} - P_{0-} e^{j\omega t + jkL}] \quad (2.15)$$

Pression et vitesse sont alors en quadrature

### Expression de l'impédance d'entrée $Z_{in}$ en fonction de l'impédance de rayonnement $Z_L$ à l'extrémité

Appelons  $Z_L$  l'impédance de rayonnement au niveau de l'extrémité ouverte

★ Nous avons à l'entrée :

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_c \frac{A + B}{A - B} \\ AZ_c + BZ_c &= AZ_{in} - BZ_{in} \\ \frac{A}{B} &= \frac{Z_c - Z_{in}}{-Z_{in} - Z_c} + \frac{Z_{in} - Z_c}{Z_{in} + Z_c} \end{aligned}$$

★ Et nous avons en sortie à l'extrémité  $L$  :

$$\begin{aligned} Z_L &= Z_c \frac{Ae^{-jkL} + Be^{jkL}}{Ae^{jkL} - Be^{-jkL}} \\ A[Z_L e^{-jkL} - Z_c e^{-jkL}] &= B[Z_L e^{jkL} + Z_c e^{jkL}] \\ \frac{A}{B} &= \frac{Z_L e^{jkL} + Z_c e^{jkL}}{Z_L e^{-jkL} - Z_c e^{-jkL}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{A}{B} &= \frac{A_{in} - Z_c}{Z_{in} + Z_c} = \frac{e^{jkL}(Z_L + Z_c)}{e^{-jkL}(Z_L - Z_c)} \\
Z_{in}[e^{-jkL}(Z_L - Z_c)] - Z_c[e^{-jkL}(Z_L - Z_c)] &= Z_{in}[e^{jkL}(Z_L + Z_c)] + Z_c[e^{jkL}(Z_L + Z_c)] \\
Z_{in} &= Z_c \frac{[e^{-jkL}(Z_L - Z_c) + e^{jkL}(Z_L + Z_c)]}{e^{-jkL}(Z_L - Z_c) - e^{jkL}(Z_L + Z_c)} \\
Z_{in} &= Z_c \frac{Z_L(\cos jkL) + jZ_c \sin(jkL)}{Z_c \cos(jkL) + jZ_L \cos(jkL)} \\
Z_{in} &= Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan kL}{Z_c + jZ_L \tan kL}
\end{aligned}$$

$$\boxed{Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan kL}{Z_c + jZ_L \tan kL}} \quad (2.16)$$

Cette équation est de la forme  $R(\text{résistance acoustique}) + jX(\text{réactance acoustique})$ .

Pour faciliter la compréhension, nous allons dans un premier temps ne pas tenir compte de l'impédance de rayonnement  $Z_L$  (on suppose  $P = 0$  à l'extrémité ouverte) afin de bien mettre en évidence les valeurs prédictives des fréquences des ondes stationnaires en fonction de la longueur de la colonne.

Nous obtenons alors :

$$\boxed{Z_{in} = j \frac{\rho c}{S} \tan(kL)} \quad (2.17)$$

Ce qui permet de comprendre pourquoi la colonne d'air occasionne des ventres de vitesse en son extrémité ouverte :

1. pour l'onde de fréquence  $\lambda = \frac{c}{4L} \sim 50$  hz pour une longueur de 1,5 m. Elle se comporte de façon équivalente au système mécanique masse ressort, ou au système électrique LC (LCR si on tenait compte des pertes). C'est l'effet recherché pour récupérer un peu de basses en sortie de colonne,
2. mais aussi pour les ondes dont la fréquence est un multiple entier impair de cette fréquence de base, avec apparition d'ondes stationnaires parasites.

**Plus globalement si on cherche à établir la matrice de transfert :**

On cherche à établir la matrice de transfert telle que

$$\begin{bmatrix} P_{in} \\ q_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_L \\ q_L \end{bmatrix}$$

On a :

$$\frac{P_{in}}{q_{in}} = Z_c \frac{A + B}{A - B}$$

$$P_{in} = A + B$$

$$q_{in} = \frac{A - B}{Z_c}$$

On suppose :

$$P_{in} = aP_L + bq_L$$

d'où

$$P_{in} = a[Ae^{-jkL} + Be^{jkL}] + b/Z_c[Ae^{-jkL} - B[Ae^{-jkL} - Be^{jkL}]]$$

$$P_{in} = A[ae^{-jkL} + b/Z_c e^{-jkL}] + B[ae^{jkL} - b/Z_c e^{jkL}]$$

Par identification, il faut que l'on ait les identités :

$$[ae^{-jkL} + b/Z_c e^{-jkL}] = 1$$

et

$$[ae^{jkL} - b/Z_c e^{jkL}] = 1$$

Ce qui amène à :

$$a = \cos(kL)$$

et

$$b = jZ_c \sin(kL)$$

De même on arrive à :

$$c = j \sin(kL)/Z_c$$

et

$$d = \cos(kL)$$

D'où l'écriture de la matrice de transfert :

$$\begin{bmatrix} P_{in} \\ q_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos kL & jZ_c \sin kL \\ j(Z_c)^{-1} \sin kl & \cos kL \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_L \\ q_L \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

À partir du débit du haut-parleur ( $q_{hp}$  = débit en entrée =  $q_{in}$ , si l'on connaît la matrice permettant de passer du rapport pression/débit en entrée vers le rapport Pression/ débit en bout de ligne,

$$\begin{bmatrix} P_{in} \\ q_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_L \\ q_L \end{bmatrix}$$

et connaissant l'impédance de sortie  $Z_L$ , il devient facile d'en déduire, :  
le débit en sortie de colonne,

$$\begin{aligned}q_{in} &= cP_{in} + dq_L \\q_{in} &= c(Z_L * q_L) + dq_L \\q_L &= \frac{q_{in}}{cZ_{in} + d}\end{aligned}$$

Ce qui nous amène dans ce cas à l'équation suivante :

$$q_L = \frac{q_{in}}{j(Z_c)^{-1} \sin klZ_{in} + \cos kL} \quad (2.19)$$

puis, comme nous le verrons, à partir du débit, le niveau de pression acoustique à distance le son perçu par l'oreille.

Évaluons d'abord l'impédance de sortie  $Z_L$ ..

## 2.6.2 Impédance à l'extrémité ouverte de la Ligne (Impédance de rayonnement)

Jusqu'à présent, on considérait qu'à l'extrémité ouverte pression et impédance étaient négligeables.

Mais bien sûr il faut bien que l'onde se propage, il y a une impédance rayonnement.

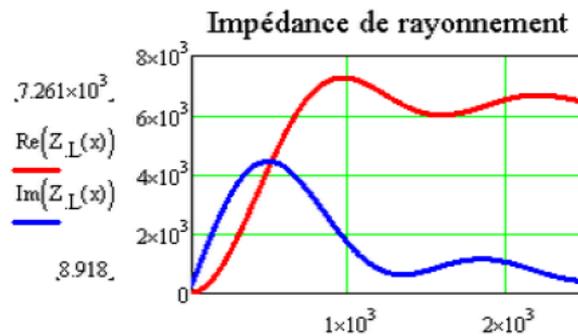
On admet alors qu'à cette extrémité du tuyau la "dernière collerette d'air" agit comme un piston circulaire plan, d'où l'analogie avec la modélisation du haut-parleur monté sur un baffle plan.

On doit aux travaux de RAYLEIGH d'avoir établi l'expression de cette impédance

Dans le cas d'une extrémité encastrée :

$$Z_L = \frac{\rho_0 c}{S} \left[ 1 - \frac{2J_1(2kr)}{2kr} + j \frac{2H_1(2kr)}{2kr} \right] \quad (2.20)$$

où  $J_1$  et  $H_1$  sont les fonctions de BESSEL et STRUVE d'ordre 1 ; ( $r$  = rayon de la colonne



- La partie réelle (en rouge) correspond à la partie qui se transmet.
- La partie imaginaire (en bleu) agit comme une masse d'air supplémentaire qui va entraîner de l'énergie réflexive.

En approximation basses fréquences, les calculs se simplifient et on arrive à :

$$Z_L \simeq \frac{\rho_0 c}{S} \left( \frac{1}{2}(kr)^2 + j \frac{8kr}{3\pi} \right)$$

Dans l'hypothèse où l'extrémité est libre et non encastrée, les calculs de Levine et Schwinger amènent :

$$Z_L \simeq \frac{\rho_0 c}{S} \left( \frac{0,5}{2}(kr)^2 + 0,7j \frac{8kr}{3\pi} \right)$$

Par rapport à la valeur calculée sans tenir compte de la correction, on remarque que les pics de résonance sont légèrement décalés vers la gauche et progressivement atténués pour les fréquences aiguës

Ce qui amène notamment à faire la correction de longueur suivante :  
La longueur initialement calculée doit être diminuée de :

- $0,85\left(\frac{S}{\pi}\right)^{1/2}$  dans le cas où l'extrémité est encastrée, ou bien
- $0,6\left(\frac{S}{\pi}\right)^{1/2}$  dans le cas où l'extrémité est libre.

Si l'on veut être précis, il faut encore prendre en compte les pertes par effet visco-thermique

### 2.6.3 Pertes par effets visco-thermiques

Les développements qui suivent partent des résultats de Zwicker et Kosten (domaine de validité pour une large bande de fréquences et de rayons)

- L'impédance  $Z_v$  est associée aux effets visqueux :  $Z_v = j\frac{\rho\omega}{S}[1 - K(k_v r)]^{-1}$
- L'inductance  $Y_t$  est associée aux effets thermiques :  $Y_t = j\frac{S\omega}{\rho c^2}[1 + (\gamma_c - 1)K(k_t r)]$
- $\gamma_c =$  rapport des chaleurs massiques ;  $\gamma_c = \frac{C_p}{C_v} = 1,402$  précision à 0,1 %
- $r =$  section de la colonne
- $K(x) = \frac{2J_1(x)}{xJ_0(x)}$  (J : fonctions de Bessel avec pour arguments :
  - $\left\{ \begin{array}{l} k_v^2 = -i\frac{\omega}{cl_v} \text{ (} l_v \text{ longueur des couches visqueuses),} \\ k_t^2 = -i\frac{\omega}{cl_t} \text{ (} l_t \text{ longueur des couches thermiques)} \end{array} \right.$
- $l_v = \frac{\mu(\text{coef de cisaillement})}{\rho c}$  ;  $l_v = 4.010^{-8}m$  précision à 2%
- $l_t = \frac{\lambda}{\rho C_p}$  ( $C_p$  : capacité calorifique massique à pression constante) ;  $l_t = 5,6.10^{-8}m$  précision à 2 %

Les développements asymptotiques de  $K(x)$  au premier ordre des rapports  $\frac{l_v}{r}$  et  $\frac{l_t}{r}$ , donnent respectivement :

$$Z_v \simeq j\frac{\rho\omega}{S} \left[ 1 + (1-j)\sqrt{\frac{2\omega l_v}{c}} \frac{1}{kr} \right]$$

$$Y_t \simeq j\frac{\omega S}{\rho c^2} \left[ 1 + (1-j)\frac{(\gamma_c - 1)\sqrt{\frac{2\omega l_t}{c}}}{kr} \right]$$

On arrive à l'expression de l'impédance caractéristique :

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_v}{Y_t}} = \frac{\rho c}{S} \left[ 1 + (1-j) \frac{1}{r\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{c}{\omega}} \left[ \sqrt{l_v} - (\gamma-1)\sqrt{l_t} \right] \right] \quad (2.21)$$

Les effets viscothermiques sont proportionnels à la racine carrée de la fréquence d'onde  
On est amené également à définir un nouveau nombre d'onde :

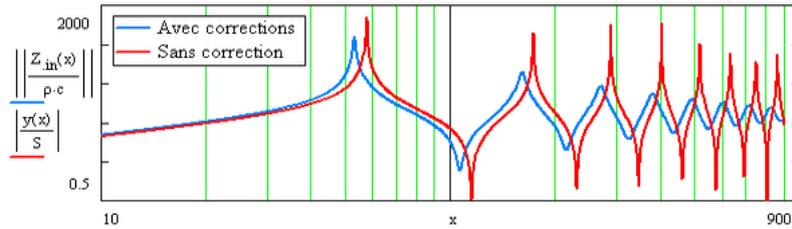
$$k = -j\sqrt{Z_v Y_y} = \frac{\omega}{c} + (1-j) \left[ \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\omega}{2c}} \left( \sqrt{l_v} + (\gamma-1)\sqrt{l_t} \right) \right] \quad (2.22)$$

On considèra que dans le cadre d'un tuyau conique  $r_m = \sqrt{r_1 r_2}$  est une bonne approximation

#### 2.6.4 Graphe de l'impédance acoustique

En rouge le graphe de l'impédance acoustique sans tenir compte ni de  $Z_L$ , ni des pertes viscothermiques

En bleu le même graphe mais en tenant compte et de  $Z_L$  et des pertes.



Ajouté à cela que l'oreille est moins sensible aux résonances dans les fréquences hautes, on comprend dès lors pourquoi le problème essentiel sera de d'atténuer les résonances dans les fréquences basses.

Poursuivons pour l'instant notre démarche. Nous avons étudié le fonctionnement du haut-parleur, mis en évidence les équations exprimant le débit d'air généré par le haut-parleur en entrée de colonne. Nous sommes capables de calculer le débit au niveau de l'extrémité ouverte en fonction du débit en entrée. Reste à évaluer en fonction de ce débit la pression acoustique exercée sur l'oreille à une distance  $d$  de la source sonore

## 2.7 Niveaux de pression acoustique à distance de l'enceinte

SPL : Sound Pressure Level

Pour mesurer la réponse acoustique, nous utiliserons un microphone à électret, muni d'un capteur sensible aux variations de pression. On exprime habituellement le niveau de pression à distance (SPL) en fonction de la pression axiale de la façon suivante :

$$S.P.L. = 20 \log \left( \frac{|P_{axial}|}{2.10^{-5}.Pa} \right) \quad (2.23)$$

### Expression de la pression axiale à une distance $d$

On suppose que l'on place le micro dans l'axe de symétrie du piston plan de rayon  $R$  formé par la membrane du HP

La pression axiale à une distance  $d$  vaut :

$$\begin{aligned} p(d, 0) &= p_{axial}(d) \\ p(d, 0) &= 2jk\rho cv \int_0^a \frac{\exp(-jk\sqrt{d^2 + R^2})}{4\pi\sqrt{d^2 + R^2}} 2\pi R dR \\ p(d, 0) &= jk\rho cv \left[ \frac{\exp(-jk\sqrt{d^2 + R^2})}{-jk} \right]_0^a \\ p(d, 0) &= -\rho cv \left[ \exp(-jk\sqrt{d^2 + a^2}) - \exp(-jkd) \right] \end{aligned}$$

Ou encore avec le débit :

$$p_{axial} = \frac{(\rho c) \mathbf{q}_L}{S} \left( e^{-jk} - e^{-jk\sqrt{\text{distance}^2 + \frac{S}{\pi}}} \right) \quad (2.24)$$

## 2.8 Équations finales et graphes

### 2.8.1 Graphe de l'Impédance électrique

#### Quelques remarques sur la courbe du haut-parleur chargé

Haut parleur monté sur une colonne de section  $16 * 40\text{cm}^2$ , de longueur  $L = 1,50\text{m}$

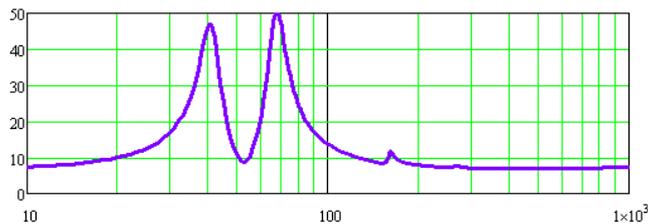


Fig 2.5 – Courbe d'impédance électrique du haut-parleur monté sur une colonne droite

Notons qu'au niveau de la fréquence d'accord de l'HP,

1. A la place d'une bosse pour un HP isolé, nous obtenons une double bosse caractéristique des oscillateurs couplé et un creux au niveau de la pulsation d'antirésonance

2. Si l'on observe l'équation qui donne l'expression de l'impédance électrique, hors mis les 2 premiers termes relatifs à la résistance et l'inductance, on peut voir qu'elle peut être considérée comme l'inverse de la somme de deux admittances

$$Y_1 = \frac{(Bl)^2}{[(j\omega C_{ms})^{-1} + j\omega M_{ms} + R_{ms}]}$$

et

$$Y_2 = \frac{(Bl)^2}{S_d^2 Z_{in}}$$

Donc cette impédance peut être pensée comme la mise en parallèle de l'impédance due à la suspension, et l'impédance due à la charge de la colonne.

L'impédance électrique de la colonne, en négligeant l'impédance d'extrémité s'écrit alors :

$$Z_{e2} = \frac{(Bl)^2 * S}{S_d^2 j \rho c \tan(kL)}$$

ce qui en approximation basses fréquences, peut encore s'écrire :

$$Z_{e2} = \frac{(Bl)^2 * S}{S_d^2 j \rho \omega L}$$

ce qui donc peut être considérée comme la charge électrique d'une **capacité** :

$$C_e = \frac{S_d^2 \rho L}{(Bl)^2 S}$$

On peut donc comprendre que les variations de l'impédance électrique sont le résultat des résonances entre l'impédance électrique de la colonne d'une part, et l'impédance de la suspension d'autre part. En négligeant l'inductance de la bobine, les pics se produisent aux fréquences pour lesquelles  $(Z_{e1} || Z_{e2} + R_e)$  atteint un maxima.

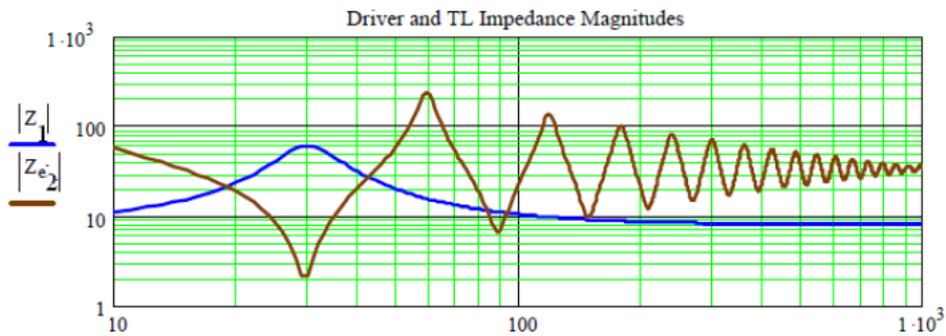


Fig 2.6 – Mise en parallèle de l'impédance du haut-parleur et de la colonne

L'impédance de la colonne qui atteint son minima vient court-circuiter les autres éléments du HP mis en parallèle : L'émission est le fait de la ligne qui devient une charge pour le H.P.

3. L'effet de couplage pour les autres fréquences apparaît de façon moins évidente

## 2.8.2 Graphe des niveaux de pression acoustique à distance

Pour tous les graphes qui suivent :

En trait plein : courbes calculées

En trait pointillé : courbes tracées d'après les relevés de mesures

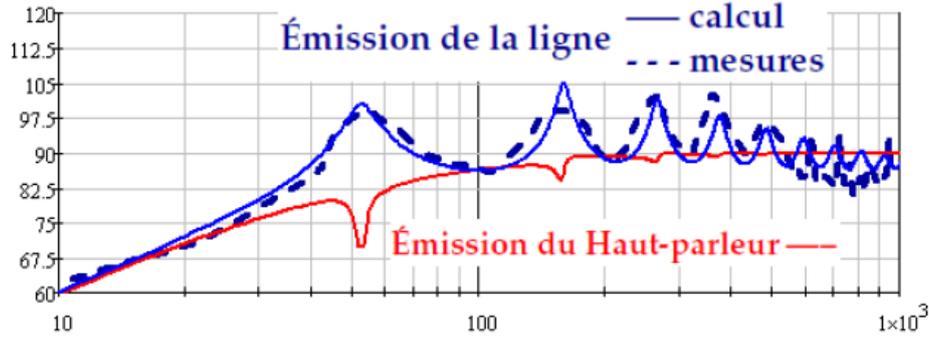


Fig 2.7 – Colonne droite : SPL extrémité ouverte et haut-parleur

### Pression engendrée par le haut-parleur sur sa face avant

Courbe en rouge

Nous avons déjà vu l'expression du débit en fonction de  $P_g$  :

$$q_{HP} = \frac{P_g}{[j\omega C_{as}]^{-1} + R_{as} + R_{ae} + j\omega M_{as} + \mathbf{Z}_{in}} \quad (2.25)$$

$P_g$  correspond (par convention) à la pression engendrée pour une puissance de 1 Watt sous 8 ohms, i.e. 2,828 Volts

Pour un Watt sous 8 ohms, nous avons :

$$\begin{cases} I = \frac{U}{R} \\ P = U_{volt} I \end{cases} \implies P = \frac{U_{volt}^2}{R} \implies U_{volt} = \sqrt{PR} \quad \text{i.e. } U_{volt} = 2,828 \text{ Volts pour 1 Watt sur } 8 \Omega$$

D'où  $P_g = 2,828 \cdot \frac{Bl}{S_d R_e}$

$$q_{hp} = \frac{P_g}{[j\omega C_{as}]^{-1} + R_{as} + R_{ae} + j\omega M_{as} + \mathbf{Z}_{in}} \quad (2.26)$$

et

$$P_{axial(hp)} = \frac{(\rho c) q_{hp}}{S_d} \left( e^{-jkd} - e^{-jk\sqrt{d^2 + \frac{S_d}{\pi}}} \right) \quad (2.27)$$

### Pression engendrée à l'extrémité ouverte de la colonne

Courbe supérieure en bleu

Nous avons déjà vu au travers des matrices de transfert comment en exprimer le débit en fonction du débit du haut-parleur :

$$q_L = \frac{q_{in}}{j(Z_c)^{-1} \sin kl Z_{in} + \cos kL} \quad (2.28)$$

et

$$P_{axial(L)} = \frac{(\rho c)qL}{S_d} \left( e^{-jkd} - e^{-jk\sqrt{d^2 + \frac{S_d}{\pi}}} \right) \quad (2.29)$$

### Émission totale du système (haut-parleur + Colonne)

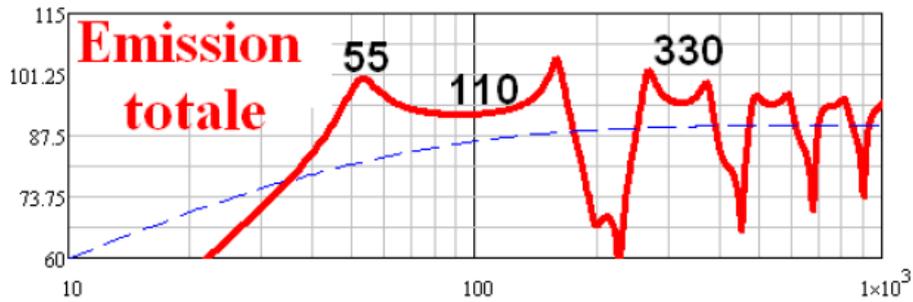


Fig 2.8 – Colonne droite : SPL total

Nous avons

$$S.P.L. = 20 \log \left( \frac{|P_{axial(\text{hp})} - P_{axial(\text{colonne})}|}{2.10^{-5}.Pa} \right) \quad (2.30)$$

Que conclure des ces graphes :

- Nous voyons ainsi que lors des maxima d'émission de la ligne, l'émission du HP passe par des minima (il ne se déplace pas en raison de la forte impédance d'entrée).
- L'effet quart d'onde joue à plein pour les fréquences multiples impairs de la résonance initiale.
- Pour les multiples pairs de la fréquence de base, c'est l'inverse
- Pour les multiples pairs de la fréquence de base ( fréquence de base = 50, donc 100,200,300, 400), on constate une alternance de maxima et de minima de la réponse globale (à 200 minima, mais à 300 maxima). Cela provient de ce que les émissions du haut-parleur et de la ligne sont alternativement en phase ou en opposition de phase selon la distance parcourue par le son : émission en phase pour les multiples impairs de la demi longueur d'onde

# 3 Autres Géométries

## 3.1 Formes coniques

On se situe dans le cas d'une géométrie présentant un coefficient d'expansion (convergeant ou divergeant) constant.

### Équation de propagation

Soit un cône de hauteur (ou de longueur)  $x$  (l'onde est supposée plane en son front), l'équation d'onde s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2(x\phi)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(x\phi)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

Elle admet pour solution générale :

$$\phi(x, t) = \frac{A}{x} e^{j\omega t} e^{-jkx} + \frac{B}{x} e^{j\omega t} e^{+jkx} \quad (3.2)$$

se composant d'une onde progressive aller et d'une onde progressive retour

### Ondes progressives

$$P(x, t) = \frac{A}{x} e^{-jkx} e^{j\omega t} \quad (3.3)$$

En appliquant l'équation d'Euler :

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\left[\frac{A}{x^2} e^{-jkx} + \frac{A}{x} jk e^{-jkx}\right] e^{j\omega t} \quad (3.4)$$

D'où

$$v(x, t) = \frac{A}{\rho \cdot c \cdot x} \left(\frac{1}{jkx} + 1\right) e^{-jkx} e^{j\omega t} \quad (3.5)$$

Pour une onde divergente, l'impédance caractéristique dépend de la position  $x$  et vaut :

$$Z_c(x) = \frac{P(x)}{S(x)v(x)} = \frac{\rho c}{S(x)} \left( \frac{jkx}{1 + jkx} \right)$$

$$Z_c(x) = \frac{\rho c}{S(x)} \left( 1 + \frac{1}{jkx} \right)^{-1}$$

$$Z_c(x) = \left( \frac{S(x)}{\rho c} + \frac{S(x)}{j\omega\rho x} \right)^{-1} \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

avec  $S(x)$  surface de l'onde sphérique au point considéré) où l'on reconnaît la mise en parallèle de l'impédance résistive d'un tuyau cylindrique avec l'inertance (équivalent acoustique de l'inductance) d'une masse acoustique  $\rho x/S(x)$

L'impédance n'est plus réelle, et elle est fonction de  $x$  et de la fréquence :

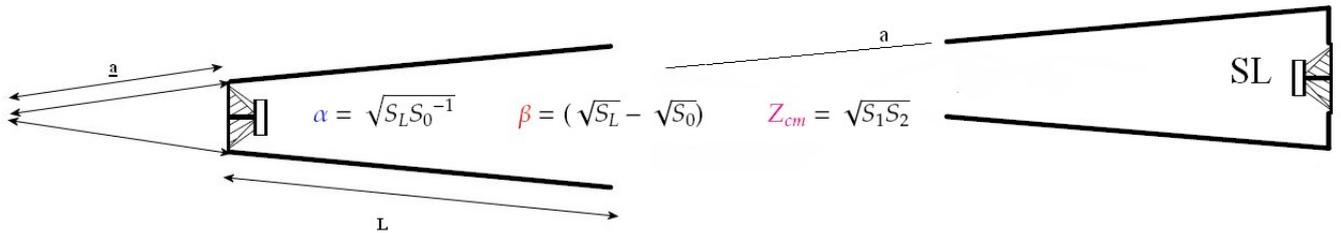
- Pour  $kx \gg 1$  la valeur de l'impédance a tendance à se rapprocher de  $\frac{\rho c}{S(x)}$  (l'impédance pour un tuyau de section  $S$ ).

- Près du sommet au contraire, c'est la partie imaginaire qui devient prédominante, le système est très réactif.

Pour une onde effectuant le trajet inverse (sens vers le sommet, nous trouvons de la même façon :

$$Z_{c(\text{converge})} = \frac{\rho c}{S(x)} \left( 1 - \frac{1}{jkx} \right)^{-1} = \bar{Z}_{c(\text{diverge})} \quad (3.8)$$

$\bar{Z}_c$  étant le conjugué de  $Z_c$



Tuyau conique divergeant

Tuyau conique convergeant

### Ondes aller plus ondes retour

En présence d'une excitation, les ondes se composent d'ondes aller et retour dont l'équation a pour solution :

$$p(x) = \left[ \frac{A}{x} e^{-jkx} + \frac{B}{x} e^{jkx} \right] \quad (3.9)$$

(Contrairement à une colonne droite l'amplitude de la pression décroît en fonction de  $x$ )

Puis en appliquant l'équation d'Euler :

$$v(x) = \frac{j}{x\rho c} \left[ A \left( 1 + \frac{1}{jkx} \right) e^{-jkx} - B \left( 1 - \frac{1}{jkx} \right) e^{+jkx} \right] \quad (3.10)$$

ou encore

$$q(x) = \frac{jS(x)}{x\rho c} \left[ A \left( 1 + \frac{1}{jkx} \right) e^{-jkx} - B \left( 1 - \frac{1}{jkx} \right) e^{+jkx} \right] \quad (3.11)$$

**Résolution : 1° approche simplifiée en supposant  $Z_L = 0$**

Supposons l'impédance de rayonnement nulle à l'extrémité ouverte, nous avons :

$$Z(a + L) = 0$$

donc

$$P(L + a) = 0 \implies B = -Ae^{-2jk(L+a)}$$

Comme :

$$e^{-jka} - e^{-2jk(L+a)} e^{jka} = \frac{2j}{e^{jk(L+a)}} \sin(k(L+a) - ka) \quad (3.12)$$

et

$$e^{-jka} + e^{-2jk(L+a)} e^{jka} = \frac{2}{e^{jk(L+a)}} \cos(k(L+a) - ka) \quad (3.13)$$

Nous obtenons :

$$\frac{P(a)}{v(a)} = j\rho c \frac{ka \sin(kL)}{ka \cos(kL) + \sin(kL)} \quad (3.14)$$

On définit

- Les surfaces ventrales comme les surfaces de Pression = 0
- Les surfaces nodales comme les surfaces de Vitesse = 0

**Colonne convergente :**

On a un ventre en sortie et un nœud côté haut-parleur.

L'impédance côté haut-parleur en  $x = a \rightarrow \infty$ , ce qui impose d'après l'équation précédente

$$ka \cos(kL) + \sin(kL) = 0 \quad (3.15)$$

équation transcendante qui peut être résolue graphiquement :

Les points d'intersection des courbes  $y = -ak$  et  $y = \tan(kL)$  permettent de retrouver la position des nœuds (fréquences propres du système).

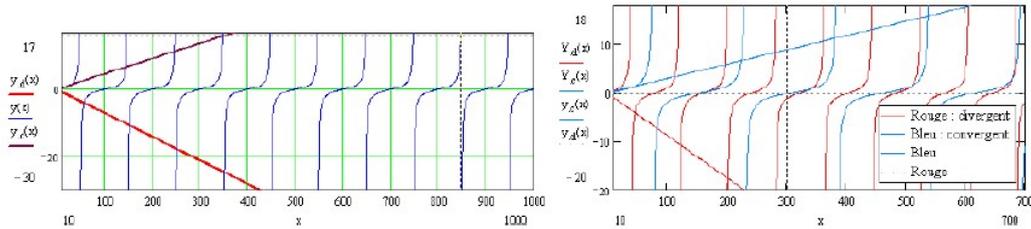
On perd l'harmonie par rapport à une colonne droite

**Colonne divergente :**

Un raisonnement similaire amène à

$$\tan(kL) = +k(L + a) \quad (3.16)$$

On perd en outre la symétrie entre une colonne convergente et une colonne divergente



**Longueur 1,7m , Rapport de section : 1/5**  
 accord à 30 hz pour la forme convergente  
 accord à 60 hz pour la forme divergente

**Accord en 50 Hz Rapport de section : 1/5**  
 Rouge forme divergente L=2,1m  
 Bleu forme convergente L=1,1m

**2° approche : calcul complet avec expression de la matrice de transfert**

On cherche à exprimer les valeurs de  $p$  et  $q$  au point d'abscisse  $x_0 = a$  en fonction des valeurs au point d'abscisse  $L' = x_0 + L$

Soient,  $a, b, c, d$ , les coefficients de la matrice de transfert, nous avons :

$$\begin{aligned}
 p_{x_0} &= \frac{A}{x_0} e^{-jkx_0} + \frac{B}{x_0} e^{+jkx_0} \\
 \frac{A}{x_0} e^{-jkx_0} + \frac{B}{x_0} e^{+jkx_0} &= ap_{L'} + bq_{L'} \\
 \frac{A}{x_0} e^{-jkx_0} + \frac{B}{x_0} e^{+jkx_0} &= a \left( \frac{A}{L'} e^{-jkL'} + \frac{B}{L'} e^{+jkL'} \right) + \frac{bS(L')}{L'\rho c} \left[ A \left( 1 + \frac{1}{jkL'} \right) e^{-jkL'} - B \left( 1 - \frac{1}{jkL'} \right) e^{+jkL'} \right] \\
 \frac{AL'}{x_0L'} e^{-jkx_0} + \frac{BL'}{x_0L'} e^{+jkx_0} &= \frac{ax_0A}{x_0L'} e^{-jkL'} + \frac{ax_0B}{x_0L'} e^{+jkL'} + \frac{bx_0S(L')}{x_0L'\rho c} \left[ A \left( 1 + \frac{1}{jkL'} \right) e^{-jkL'} - B \left( 1 - \frac{1}{jkL'} \right) e^{+jkL'} \right] \\
 \frac{AL'}{x_0L'} e^{-jkx_0} + \frac{BL'}{x_0L'} e^{+jkx_0} &= A \left[ \frac{ax_0}{x_0L'} e^{-jkL'} + \frac{bx_0S(L')}{x_0L'\rho c} \left( 1 + \frac{1}{jkL'} \right) e^{-jkL'} \right] + B \left[ \frac{ax_0}{x_0L'} e^{+jkL'} + \frac{bx_0S(L')}{x_0L'\rho c} \left( -1 + \frac{1}{jkL'} \right) e^{+jkL'} \right]
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$L = e^{-jkL} \left[ ax_0 + \frac{bx_0S(L')(jkL' + 1)}{jkL'\rho c} \right]$$

et d'autre part

$$L = e^{+jkL} \left[ ax_0 - \frac{bx_0 S(L')(jkL' - 1)}{jkL'\rho c} \right]$$

D'où :

$$b = \frac{L'}{x_0 S \rho c j \sin(kL)(L')} \quad (3.17)$$

et

$$a = \frac{L' \cos(kL)}{x_0} - \frac{\sin(kL)}{kx_0} \quad (3.18)$$

De la même façon, nous pouvons écrire :

$$q(x_0) = \frac{S(x_0)}{x_0 \rho c} \left[ A \left( 1 + \frac{1}{jkx_0} e^{-jkx_0} \right) - B \left( 1 - \frac{1}{jkx_0} \right) e^{jkx_0} \right] = c \left[ \frac{A}{L'} e^{-jkL'} + \frac{B}{L'} e^{jkL'} \right]$$

Et nous arrivons à :

$$d = \frac{x_0 \cos(kL)}{L'} + \frac{\sin(kL)}{kL'} \quad (3.19)$$

$$c = \frac{j\rho c L' \sin(kL)}{S(x_0)x_0} + \frac{j\rho c \sin(kL)}{S(x_0)k^2 x_0^2} - \frac{j\rho c L \cos(kL)}{S(x_0)kx_0^2} \quad (3.20)$$

En remarquant les relations entre  $S(x_0)$ ,  $S(L')$ ,  $L'$ ,  $L$ ,  $x_0$ , et en posant pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} Z_{cm} &= \frac{\rho c}{\sqrt{S(x_0)S(L')}} \\ \alpha &= \sqrt{S(L')/S(x_0)} \\ \beta &= \sqrt{S(L') - S(x_0)} \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire la matrice de transfert, forme évasée (sortie plus grande que entrée) :

$$\begin{bmatrix} p_{in} \\ q_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cos kL - \frac{\beta \sin kL}{k\sqrt{S_0 L}} & Z_{cm} j \rho c \sin kL \\ = Z_{cm}^{-1} \left[ \left( 1 + \frac{\beta^2}{k^2 L^2 \sqrt{S_0 S_L}} \right) \sin kL - \frac{\beta^2 \cos kL}{kL \sqrt{S_0 S_L}} \right] & \frac{\cos kL}{\alpha} + \frac{\beta \sin kL}{\alpha kL \sqrt{S_0}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_L \\ q_L \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

De même pour une forme convergente, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} p_{in} \\ q_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos kL}{\alpha} + \frac{\beta \sin kL}{\alpha kL \sqrt{S_0}} & Z_{cm} j \rho c \sin kL \\ = Z_{cm}^{-1} \left[ \left( 1 + \frac{\beta^2}{k^2 L^2 \sqrt{S_0 S_L}} \right) \sin kL - \frac{\beta^2 \cos kL}{kL \sqrt{S_0 S_L}} \right] & \alpha \cos kL - \frac{\beta \sin kL}{k\sqrt{S_0 L}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_L \\ q_L \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Ce qui nous permet de tracer les courbes de l'impédance acoustique de la colonne d'air, et des niveaux de pression attendus en sortie de colonne afin de pouvoir les comparer aux mesures obtenues



Formé évasée :  $L = 2,20m$ ,  $S_L/S_0 = 4$

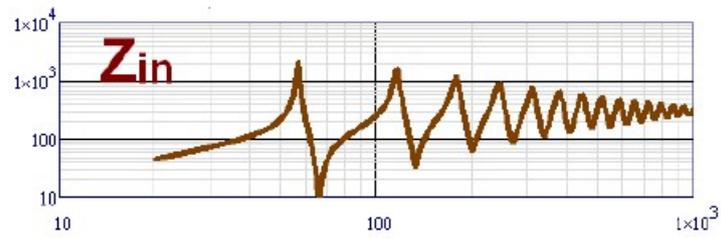


Fig 3.1 – Colonne évasée : Impédance acoustique

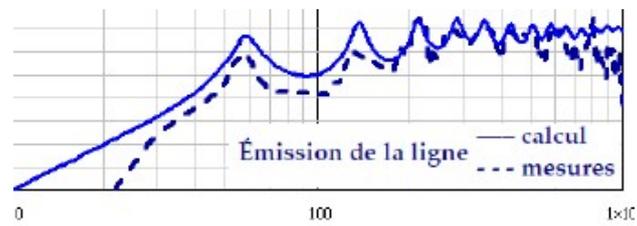


Fig 3.2 – Colonne évasée : SPL extrémité ouverte

Forme convergente :  $L = 1,10m$  ;  $S_L/S_0 = 1/4$



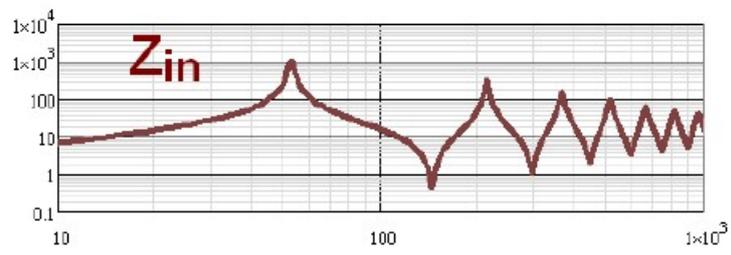


Fig 3.3 – Colonne convergente : Impédance acoustique

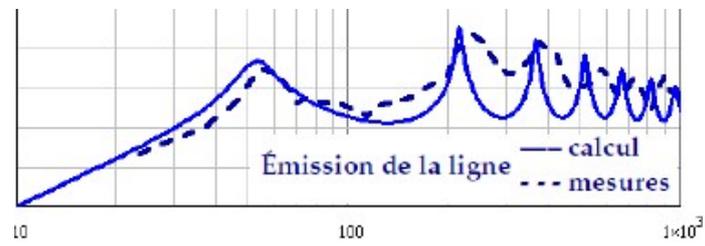


Fig 3.4 – Colonne convergente : SPL extrémité ouverte

### **Comment interpréter ces résultats :**

Plusieurs différences sont à remarquer entre les deux types de conicité.

Une construction convergente (surface de l'extrémité ouverte plus grande que la surface d'entrée. La fréquence d'accord est obtenue pour une longueur plus courte que dans le cadre d'une colonne de section constante, l'écart est d'autant plus important que l'est le rapport surface d'entrée / surface de sortie. Plus on est proche de la première fréquence de résonance, plus les pics d'impédance sont plus espacés. cette solution peut être intéressante, notamment si l'on a prévu de filtrer le haut parleur de basse avec une coupure assez basse (ce qui permet éventuellement de l'utiliser sur une plage sans résonances harmoniques, nous le verrons plus tard en utilisant un autre artifice de construction).

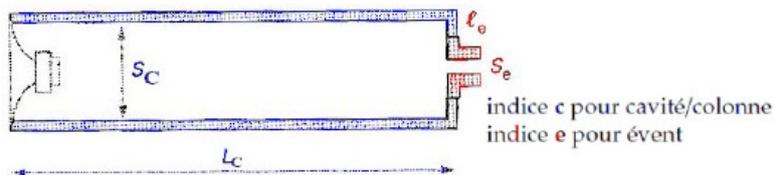
Dans le cas d'une construction divergente, (surface de l'extrémité ouverte plus grande que la surface d'entrée), c'est l'inverse qui se produit :

Les fréquences de résonance sont s'autant plus rapprochées que l'on se rapproche de la première fréquence d'accord. En contre partie, le niveau sonore obtenue (SPL) est beaucoup plus important.

### 3.2 Colonne avec événement

Pour raccourcir la longueur de la colonne et/ou diminuer l'émission des harmoniques dans les hautes fréquences, on peut adjoindre à l'extrémité ouverte un événement.

Sous cette forme là, nous avons ce que les anglo-saxons appellent une "Mass Load Transmission Line" MLTL .



Soit une colonne de longueur  $L_C$  et de section  $S_C$  se terminant par un événement de longueur  $l_e$  et de section  $S_e$ .

(Dans tout ce qui suit on utilise l'indice "C" pour colonne et "e" pour événement)

L'expression de l'impédance d'entrée peut s'exprimer par le produit de deux matrices de transfert :

$$\begin{bmatrix} p_{in} \\ q_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos kL_C & jZ_{c1} \sin kL_C \\ j(Z_{c1})^{-1} \sin kL_C & \cos kL_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos kl_e & jZ_{c2} \sin kl_e \\ j(Z_{c2})^{-1} \sin kl_e & \cos kl_e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_L \\ q_L \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Soit pour une colonne de  $L = 0,7m$ ,  $S = 0,30 * 0,30cm^2$  et un événement  $R = 5cm$   $l_e = 5cm$ , le graphe de l'impédance d'entrée suivant :

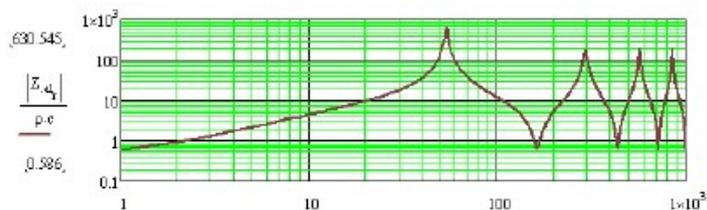


Fig 3.5 – Impédance acoustique d'une colonne avec événement

En utilisant l'équation déjà mentionnée et l'expression de  $Z_{in}$  indiquée, nous obtenons le graphe des niveaux de pression suivant :

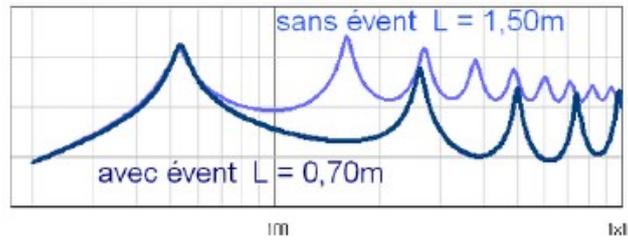


Fig 3.6 – Comparatif des niveaux de pression en bout de ligne avec et sans événement

En bleu sombre : courbe avec événement

En bleu clair : courbe avec une colonne droite (fréquence d'accord identique)

On voit donc que ce type de montage permet d'obtenir une fréquence d'accord identique avec une longueur de ligne beaucoup plus courte.

On remarque également que l'événement entraîne une atténuation des hautes fréquences : Il y a une masse d'air mise en oscillation. Pour une excitation identique, l'inertie de cette masse en freine les déplacements et en réduit la vitesse lorsque les fréquences augmentent. Si la vitesse, et donc le débit, diminue lorsque la fréquence augmente, il en est de même du niveau émis par l'intermédiaire de cet événement.

Par ailleurs un tel montage n'est pas sans rappeler une construction de type bass-reflex...

### Analogie avec un bass-reflex.

Dans les calculs qui suivent, nous nous situons dans le système mécanique :

Au prix de quelques approximations, nous allons chercher à retrouver à partir de l'expression de l'impédance, la formule du résonateur d'Helmoltz

**1° approximation** - Pour simplifier les calculs, nous supposons l'impédance de rayonnement à l'extrémité nulle ( $Z_L = 0$ ).

En utilisant le calcul matriciel indiqué plus haut, nous obtenons :

$$Z_{in}(meca) = \rho c S_C \frac{j \frac{S_C}{S_e} \tan kl_e + j \tan kL_C}{1 + j^2 \frac{S_C}{S_e} \tan kl_e \tan kL_C}$$

**2° approximation** - Dans les conditions d'approximation basses fréquences, nous avons  $\tan kL_C \sim kL_C$  et  $\tan kl_e \sim kl_e$

Au numérateur nous avons donc puisque :  $kc = \omega$  et  $m_c = \rho S_c L_c$  et  $m_e = \rho l_e S_e$  :

$$\begin{aligned}
N &= \rho c S_C (j(S_C/S_e) \tan kl_e + j \tan kL_C) \\
N &= jkc[\rho S_C \frac{S_C * S_e}{S_e * S_e} l_e + \rho S_C L_C] \\
N &= j\omega[\left(\frac{S_C}{S_e}\right)^2 m_e + m_c]
\end{aligned}$$

Nous appellerons pour simplifier l'écriture :  $\left(\frac{S_C}{S_e}\right)^2 m_e = m_v$  **masse virtuelle de l'air contenu dans l'évent.**)

Au dénominateur nous avons :

$$\begin{aligned}
D &= 1 + j^2(S_C/S_e)kl_e kL_C \\
D &= 1 - \frac{k * k * S_C * L_C * l_e * \rho}{\rho S_e * S_e} \\
D &= \frac{k^2 S_C m_e L_C}{\rho S_e^2} \\
D &= 1 - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{S_C m_e L_C}{\rho S_e^2}
\end{aligned}$$

Rappelons que  $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$  et posons  $K_C = \frac{\gamma P}{V_C} S_C^2$  et  $k_e = \frac{\gamma P}{V_e} S_e^2$  pour représenter les **coefficients de raideur acoustique** de la cavité-colonne et de l'évent,

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
D &= 1 - \frac{\rho \omega^2}{\gamma P} \cdot \frac{S_C m_e L_C}{\rho S_e^2} \\
D &= 1 - \frac{\rho \omega^2}{\gamma p} \cdot \frac{S_C^2 m_e L_C}{S_C \cdot S_e^2} \rho \\
D &= 1 - \frac{\rho \omega^2}{\rho} \cdot \left(\frac{S_C}{S_e}\right)^2 m_e \cdot \frac{L_C}{\gamma P S_C} \\
D &= 1 - \omega^2 \frac{\left(\frac{S_C}{S_e}\right)^2 m_e}{K_C}
\end{aligned}$$

Soit au final (en unités mécaniques) :

$$\begin{aligned}
Z_{in} &= \frac{j(m_v + m_C)\omega}{1 - \omega^2(m_v/K_C)} \\
Z_{in} &= \frac{j\left(\left(\frac{S_C}{S_e}\right)^2 m_e + m_C\right)\omega}{1 - \omega^2\left(\left(\frac{S_C}{S_e}\right)^2 m_e / \frac{\gamma P}{V_C} S_C^2\right)} \\
Z_{in} &= \frac{j\left(\left(\frac{S_C}{S_e}\right)^2 m_e + m_C\right)\omega}{1 - \omega^2\left(\left(\frac{S_C}{S_e}\right)^2 m_e \cdot \frac{V_C}{\gamma P} S_C^2\right)}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Remarquons à ce stade que la première résonance est obtenue lorsque le dénominateur tend vers 0, i.e. :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\gamma P S_e^2}{V_C S_e l_e \rho}} \tag{3.25}$$

Ce qui correspond bien à la formule donnant la fréquence d'accord du résonateur d'Helmoltz !

Posons maintenant :

$$\frac{m_v}{K_C} = \frac{m_v(1 + K_e/K_C)}{K_C(1 + K_e/K_C)} = \frac{m_v + m_C}{K_C + K_e}$$

Nous avons au final, (et toujours en système mécanique) :

$$\begin{aligned}
Z_{in}(meca) &= \frac{(jm_v + m_c)\omega \cdot (K_C + K_e)/j\omega}{j(m_v + m_c)\omega + (K_C + K_e)/j\omega} \\
Z_{in}(meca) &= \frac{j\left[m_C + \left(\frac{S_C}{S_e}\right)^2 m_e\right]\omega \cdot \left(\frac{\gamma P}{V_C} S_C^2 + \frac{\gamma P}{V_e} S_e^2\right)/j\omega}{j\left[m_C + \left(\frac{S_C}{S_e}\right)^2 m_e\right]\omega + \left(\frac{\gamma P}{V_C} S_C^2 + \frac{\gamma P}{V_e} S_e^2\right)/j\omega}
\end{aligned}$$

On voit ainsi apparaître dans cette expression (conditions d'approximation basses fréquences étendues), une représentation complète du système prenant en compte :

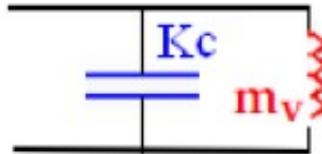
- l'inertie de l'air : et de l'évent ( $m_e$ ) et de la colonne ( $m_C$ ),
- l'élasticité de l'air : et dans l'évent ( $K_e$ ) et dans la colonne ( $K_C$ ).

**3° approximation** Dans le cas d'une enceinte bass-reflex classique où la section de l'évent est faible devant celle de la colonne :  $S_C \gg S_e$  et l'élasticité de l'évent faible devant celle de la

colonne  $K_e \ll K_C$ , nous retrouvons :

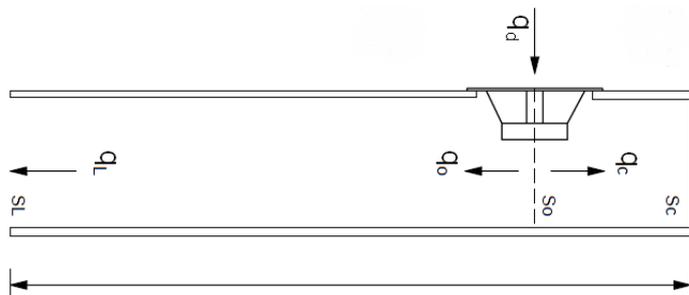
$$Z = \frac{j m_v \omega \cdot K_C / j \omega}{j m_v \omega + K_C / j \omega}$$

qui fait apparaître la masse de l'air dans l'évent et l'élasticité de la cavité principale, principe du bass-reflex.



En conclusion de ce sous-chapitre, nous voyons que la mise en place d'un évent permet d'obtenir une construction beaucoup moins volumineuse. Le modèle de calcul utilisé est totalement compatible avec la formule d'un résonateur d'Helmoltz ou d'une enceinte bass-reflex classique pour laquelle la section de l'évent reste faible au regard de celle de la cavité principale.

### 3.3 Influence du placement de l'haut-parleur sur la ligne



Lorsque le Haut-parleur n'est plus placé à l'extrémité, l'impédance totale correspond à la mise en parallèle d'une impédance qui "voit" l'extrémité fermée (closed) avec pour cette extrémité une valeur infinie, et d'une autre qui "voit" l'extrémité ouverte (open)

$$Z_{in(closed)} = \rho c \frac{\cot(kL_{closed})}{jS} \quad (3.26)$$

$$Z_{in(open)} = \frac{jZ_c \tan(kL_{open}) + Z_L}{Z_c + jZ_L \tan(kL_{open})} \quad (3.27)$$

$$(3.28)$$

$$Z_{in} = \left( \frac{1}{Z_{in(open)}} + \frac{1}{Z_{in(closed)}} \right)^{-1} \quad (3.29)$$

$$q_{open} = \frac{q_d}{1 + \frac{Z_{in(open)}}{Z_{in(closed)}}} \quad (3.30)$$

$$q_L = \frac{Z_c q_o}{j \sin(kL_{open}) Z_L + Z_c \cos(kL_{open})} \quad (3.31)$$

$$(3.32)$$

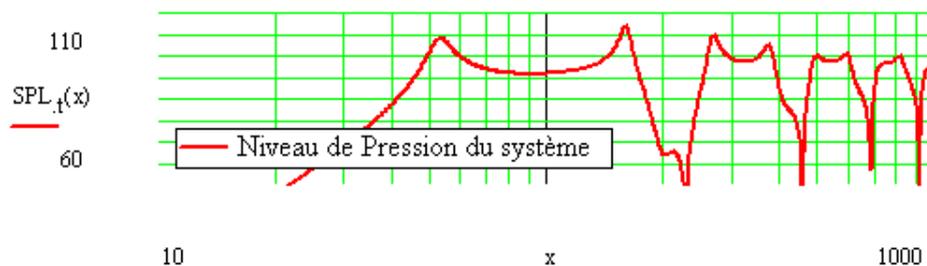


Fig 3.7 – SPL total : Haut-parleur positionné au niveau de l'extrémité fermée

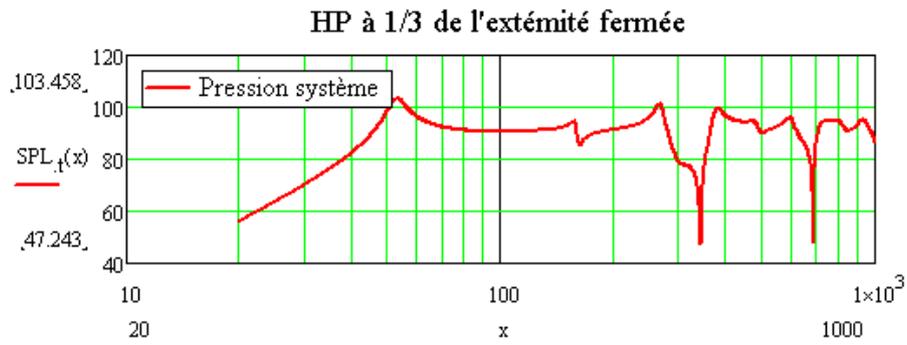


Fig 3.8 – SPL total : Haut-parleur décalé à  $1/3$  de l'extrémité fermée

En positionnant le haut-parleur à environ  $1/3$  de l'extrémité fermée, nous obtenons une diminution de la résonance  $3f_0$  et  $9f_0$

C'est un point extrêmement important à repérer. dans le cas où le concepteur voudrait réaliser uniquement un caisson de basses en utilisant un filtre avec une coupure suffisamment basse, on peut totalement éviter la création d'ondes stationnaires.

### 3.4 Comparatif des différentes formes géométriques

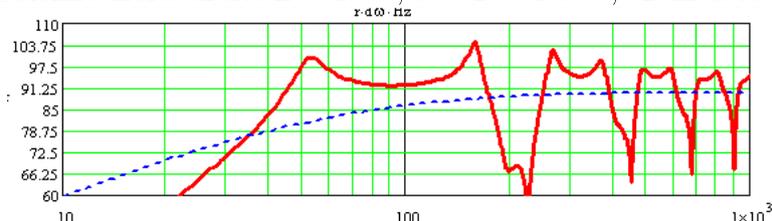
Nous allons maintenant faire un rapide comparatif des différentes géométries étudiées jusque là, ce qui nous permettra également de donner les orientations de calcul concernant les enceintes à pavillon et les enceintes de type bass-reflex.

Comme à l'habitude, les courbes en rouge représentent les niveaux de pression acoustique du système (S.P.L.) obtenus à partir des modèles mathématiques précédemment étudiés.

#### 3.4.1 Forme droite

Pour rappel, voici ce que l'on peut attendre d'une colonne de section constante et de dimensions "moyennes" accordée sur la fréquence de résonance de notre haut-parleur Focal :

Colonne droite droite  $L = 1.5m$ ,  $S = 16 * 40cm^2$ , 72 dB à 30 Hz

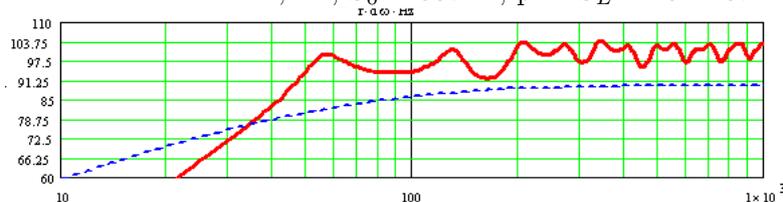


On le voit, la courbe des niveaux sonores obtenus n'incite pas à construire une telle enceinte telle quelle ! Notre prototype de base est absolument inutilisable, il a servi essentiellement à la mise en évidence du principe

#### 3.4.2 Forme évasée

72,5 db à 30 hz. La forme évasée est celle qui permet d'obtenir les niveaux sonores les plus hauts

Forme évasée  $L = 2,2m$ ,  $S_0 = 50cm^2$ , puis  $S_L = 29 * 40cm^2$



- Avec une forme "évasée" (extrémité ouverte plus grande), on remarque de suite deux choses :
- Malgré des pics plus rapprochés, la courbe est dans l'ensemble beaucoup plus régulière (+/- 5db). L'enceinte pourrait presque être écoutée telle quelle
  - Toutefois les dimensions de l'enceinte commencent à être imposantes.

Pendant longtemps, on a souvent assimilé (à tort), forme évasée et charge pavillonnaire. C'est probablement en raison de la publication du livre de RAYLEY "The theory of sound". Examinons les différences :

### 3.4.3 Introduction à la théorie des Pavillons

Dans un conduit de forme pavillonnaire, la propagation des ondes répond à l'équation de Webster :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

Plus connu sous cette forme :

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{S \partial P}{\partial x} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

On remarquera que si S est proportionnel à  $x^2$  (forme conique), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2 \partial P}{\partial x} \right) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{2 \partial P}{x \partial x} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \\ \frac{1}{x} \frac{\partial^2 (xP)}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 (xP)}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (xP)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

équation que nous avons utilisée pour la propagation dans les formes coniques  
Alors que dans le cas d'une expansion exponentielle, nous avons :

$$\begin{aligned} y &= e^{m'x} \\ S(x) &= \pi e^{2m'x} = \pi e^{mx} \\ \frac{1}{\pi e^{mx}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \pi e^{mx} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$m \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Il existe une fréquence de coupure :

On suppose une OPPH :

$$\begin{aligned}
P &= P_0 e^{j(\omega t - kx)} \\
\implies \frac{1}{c^2}(-\omega^2)P &= m(-jk)P + (-k^2)P \\
\implies k^2 + jmk - \frac{\omega^2}{c^2} &= 0 \\
\implies k &= \frac{1}{2c} \sqrt{4\omega^2 - c^2} - j \frac{mc}{2} \\
\implies f_c &= \frac{mc}{4\pi}
\end{aligned}$$

Par ailleurs si l'on suppose le conduit infiniment long :

$$Z_c(x) = \frac{p(x)}{S(x)v(x)} = \frac{\rho c}{S(x)}$$

qui tend vers 0 lorsque  $x \rightarrow \infty$ .

On remarquera le même effet pour un conduit conique infiniment long, mis à part le fait que l'expansion sera moins rapide.

Ce pavillon présente une fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{mc}{4\pi}$$

avec une surface d'ouverture :

$$S_L = \frac{\left(\frac{c}{2f_c}\right)^2}{\pi}$$

Un pavillon infini aurait une charge purement résistive.

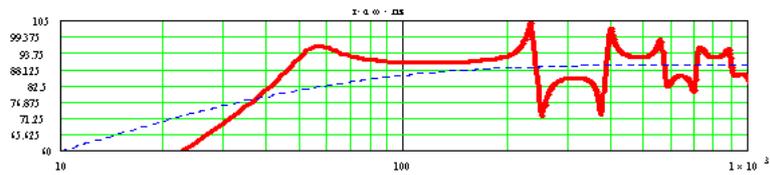
Certains sont allés jusqu'à faire l'analogie entre les colonnes accordées et les pavillons acoustiques, voir à ce sujet la publication en 1916 de Lord Rayleigh dans "theory of sound" [13]. Mais alors que le pavillon travaille comme un *adaptateur d'impédance large bande* (et a pour but de fournir une énergie purement dissipative), le tuyau accordé en quart d'onde fonctionne comme un adaptateur en bande étroite.

En contre partie, un pavillon qui descend bas a des dimensions énormes, (de l'ordre de la longueur d'onde de la fréquence la plus basse à reproduire et sa longueur doit au moins être le quart de la longueur d'onde de cette fréquence, en pratique on prend 0,4).

Sur un registre très différent, nous avons les formes coniques convergentes, ainsi que les colonnes avec évent

### 3.4.4 Forme convergente

Convergente  $L = 1m$ ,  $S_0 = 16 * 40cm^2$  puis  $S_L = 16 * 8cm^2$ , 68,5 dB à 30 Hz.



Outre le fait que les dimensions de la colonne sont beaucoup plus raisonnables (tout en maintenant l'accord sur la fréquence de résonance du haut-parleur) on remarque un écartement entre les deux premières fréquences de résonance, ce qui donne une certaine ressemblance avec la forme droite + événement.

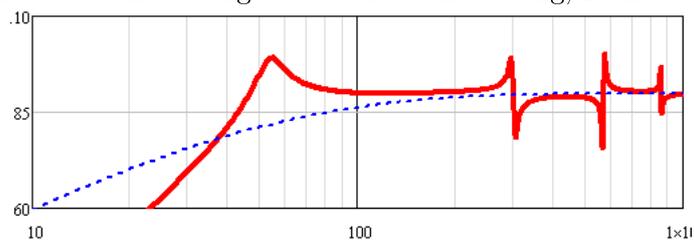
C'est un point intéressant à noter pour celui qui voudrait construire un caisson de basses : effectivement même utilisé tel quel, on note une plage relativement homogène de 50 à 200 hertz

### 3.4.5 Forme droite avec événement

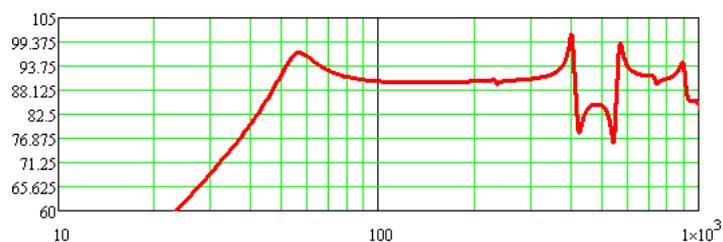
Appelée également Mass Load Transmission Line (MLTL)

Comme mentionné un peu plus haut, on note là aussi une certaine similitude de réponse dans la plage de 50 à 200 hertz

Colonne de 70 cm de long avec événement 6 cm de long, 2 cm de rayon :



Et si en plus on place le HP à 1/3 de la longueur, nous obtenons une réponse à peu près homogène entre 50 et 400 hertz.



Nous avons déjà vu que le modèle mathématique utilisé permettait de mettre en évidence la formule d'un résonateur d'Helmutz

Mais qu'en est il exactement si avec ce même haut-parleur, nous essayons de réaliser une enceinte type bass-reflex avec des paramètres optimisés pour obtenir un filtre Butterworth d'ordre 4, appelé également "maximally flat"

### 3.4.6 Étude de la charge Bass-reflex alignée selon un filtre Butterworth d'ordre 4

La démarche de calcul n'est pas tout à fait la même que lorsque nous cherchions à mettre en évidence le résonateur d'Helmholtz à partir d'une ligne de transmission acoustique terminée par un évent.

Nous allons chercher ici à aligner la réponse du système sur la réponse prédéterminée d'un filtre Butterworth d'ordre 4 dont la fonction de transfert peut s'écrire :

$$G\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + a_1\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 + a_2\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + a_3\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 1} \quad (3.33)$$

Une enceinte à évent peut être schématisée de la façon suivante :

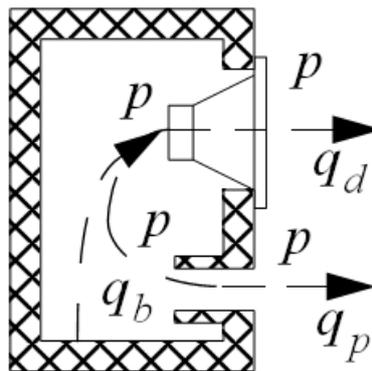


Fig 3.9 – Schéma d'une enceinte bass-reflex

- $q_d$  est le débit sortant du diaphragme
- $q_p$  est le débit sortant de l'évent
- $q_b$  est le débit entrant dans le volume  $V_b$  de l'enceinte présentant une compliance acoustique  $C_{ab}$

Nous avons les schémas suivants :

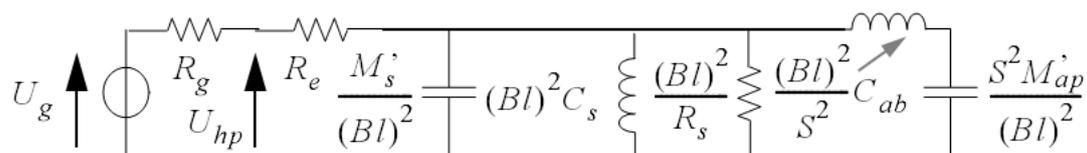


Fig 3.10 – Bass-reflex : circuit électrique équivalent à basses fréquences

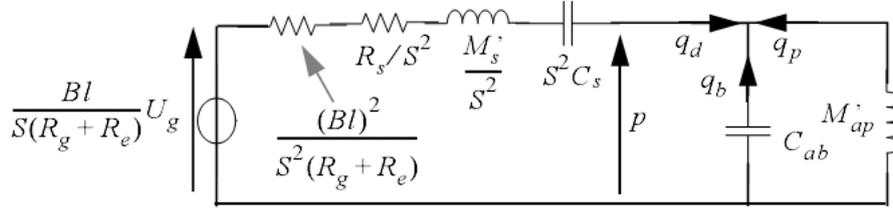


Fig 3.11 – Bass-reflex : circuit acoustique équivalent à basses fréquences

Nous avons :

$$-q_b = q_d + q_p$$

$q_d$  traverse les impédances acoustiques de rayonnement du diaphragme  $Z_{ar1}$  (face avant) et  $Z_{ar2}$  (face arrière)

$q_p$  traverse les impédances de rayonnement de l'évent  $Z_{ap1}$  pour la face avant, et  $Z_{ap2}$  pour la face arrière, qui chargent la masse acoustique  $M_{ap}$  de l'évent.

On définit également  $M'_s$  la masse équivalente de l'équipage mobile et  $M_{ap}$  la masse acoustique de l'évent.

Nous posons les notations suivantes :

– Résonance du haut-parleur  $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{M_{ad}C_{as}}}$  ( $M_{ad}$  = masse acoustique diaphragme ;  $C_{as}$  = compliance acoustique suspension),

– Résonance de la boîte  $\omega_b = \frac{1}{\sqrt{M_{ap}C_{ab}}}$  ( $M_{ap}$  = masse acoustique port ;  $C_{ab}$  = compliance acoustique boîte)

– Résonance du résonateur d'helmoltz  $\omega^2 = \omega_b * \omega_s$  (produit des deux précédents)

–  $h = \frac{\omega_b}{\omega_s}$

–  $\alpha$  rapport de souplesse =  $\frac{S^2C_s}{C_{ab}} = \frac{C_{as}}{C_{ab}}$  (rapport des compliances acoustiques suspension et boîte)

–  $Q_t^{-1} = Q_{ms}^{-1} + \frac{R_e}{R_g + R_e} Q_{es}^{-1}$

–  $Z'_{ah} = jM_{ap}\omega + \frac{1}{jC_{ab}\omega}$ ,

L'analyse du schéma conduit à poser les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{jC_{ab}\omega}(-q_b) \\
p &= jM_{ap}\omega(-q_p) \\
p &= \frac{1}{(jM_{ap}\omega)^{-1} + jC_{ab}\omega}q_d \quad (\text{les 2 impédances en parallèle}) \\
\frac{Bl}{S(R_g + R_e)}U_g &= Z'_{as}q_d + \frac{1}{jC_{ab}\omega}(-q_b) \quad (Z'_{as} \text{ est l'impédance équivalente du HP})
\end{aligned}$$

Donc en exprimant  $q_d$  en fonction de  $q_b$  à l'aide des précédentes équations, nous obtenons :

$$q_d = \frac{Z'_{ah}}{jM_{ap}\omega}(-q_b)$$

et

$$\frac{Bl}{S(R_g + R_e)}U_g = \left[ Z'_{as} \frac{Z'_{ah}}{jM_{ap}\omega} + \frac{1}{jC_{ab}\omega} \right] (-q_b)$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$\begin{aligned}
G\left(j\frac{\omega}{\omega_s}\right) &= \left[ \frac{(j\omega/\omega_s)^2 + Q_t^{-1}(j\omega)/\omega_s + 1}{(j\omega/\omega_s)^2} \cdot \frac{(j\omega/\omega_s)^2 + 1}{(j\omega/\omega_s)^2} + \frac{\alpha}{(j\omega/\omega_s)^2} \right]^{-1} \\
G\left(j\frac{\omega}{\omega_s}\right) &= \frac{(j\omega/\omega_s)^4 h^{-2}}{\frac{(j\omega/\omega_s)^4}{h^2} + \frac{(j\omega/\omega_s)^3}{h^2 Q_t} + (j\omega/\omega_s)^2 \left[ 1 + \frac{1 + \alpha}{h^2} \right] + \frac{(j\omega/\omega_s)}{Q_t} + 1}
\end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de transfert d'un passe haut du 4° ordre (pente de 24db/octave suivie d'une pente 0)

On procède à l'alignement, i.e. la détermination de ces constantes, en identifiant l'expression à une fonction de transfert classique (BB4 ou Tchebycheff T4).

$$G\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + a_1 \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 + a_2 \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + a_3 \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 1}$$

En posant :

$$\omega_0 = \omega_s \sqrt{h}, \quad a_1 = \frac{Q_t^{-1}}{\sqrt{h}}, \quad a_2 = h + \frac{(1 + \alpha)}{h}, \quad \text{et} \quad a_3 = Q_t^{-1} \sqrt{h},$$

nous avons bien :

$$G\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + a_1\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 + a_2\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + a_3\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 1}$$

Par exemple pour la fonction de transfert Butterworth B4, on a (valeurs données par ROSSI) :  
 $a_1 = a_3 = 2,613$ ,  $a_2 = 3,414$ , et  $\omega_3 = \omega_0$

On en déduit également :  $h = \frac{a_3}{a_1}$ ,  $\alpha = a_2h - h^2 - 1$ ,  $Q_t = \frac{1}{\sqrt{a_1a_3}}$  et  $\omega_s = \frac{\omega_3}{\sqrt{h}(\omega_3/\omega_0)}$

On obtient alors les valeurs suivantes :

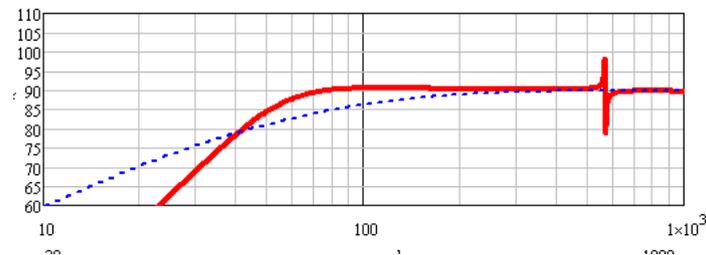
$\alpha = V_{as}/V_b$ , d'où  $V_b \sim 7,8l$ , et

$\omega_0^2 = \frac{1}{C_{ab}J_{ae}}$  ( $J_{ae}$  étant l'inertance de la masse d'air  $M_e$  de l'évent).

On en déduit les dimensions de l'évent :

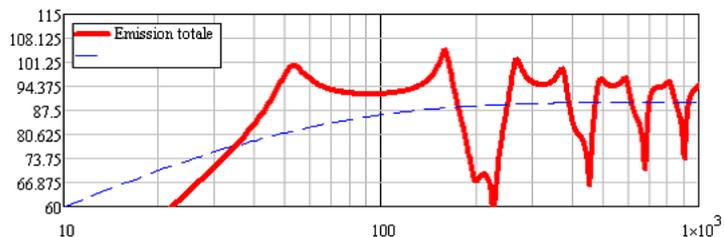
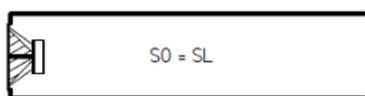
Par exemple, pour une enceinte de 30 cm x 20 cm x 13 cm, nous obtenons les dimensions de l'évent  $r = 2,5\text{cm}$  pour  $l_e = 15\text{cm}$

Ce qui donne la courbe de réponse suivante :

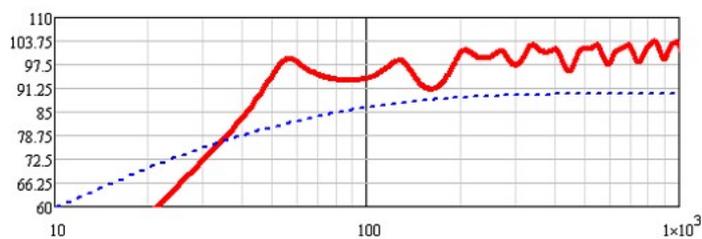
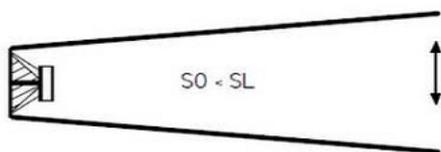


Résumons par un tableau :

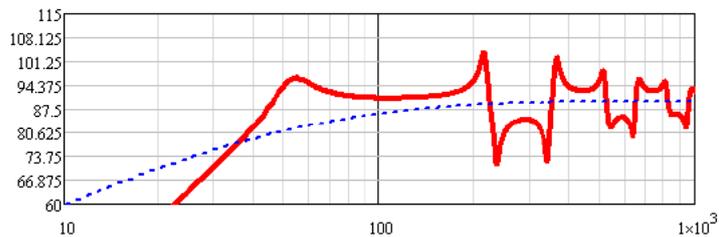
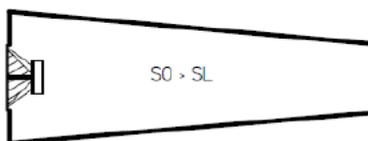
$L = 1,50m \quad S = 16 * 40cm^2$



$L = 2,20m \quad S_0 = 30cm^2 \quad S_L = 30 * 40cm^2$



$L = 1m, h1 \quad S_0 = 16 * 40cm^2, \quad S_L = 120cm^2$



$L = 60cm, \quad S = 30 * 30cm^2, \quad l_e = 5cm, \quad r_e = 4cm$

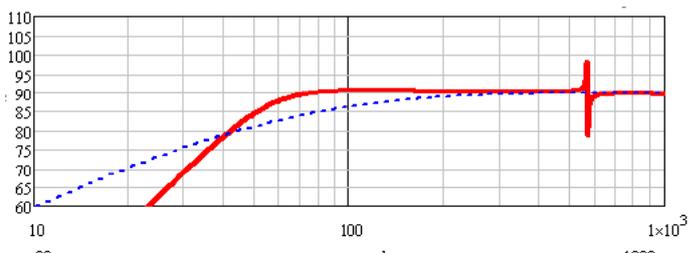
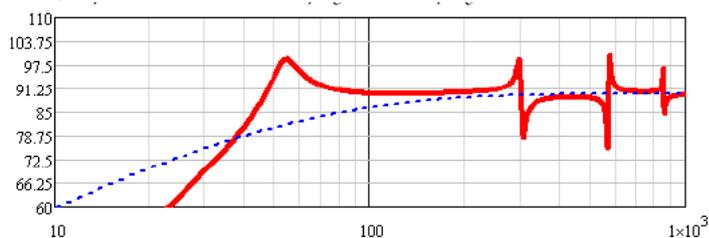


Fig 3.12 – Tableau comparatif des différentes formes

A ce stade, les résultats demeurent encore bien médiocres. La réalisation d'une enceinte de type Bass reflex semble bien mieux convenir au moins pour ce haut-parleur. Toutefois, nous allons voir maintenant que l'utilisation d'un matériau absorbant permet de nettement réduire la production d'ondes stationnaires...

# 4 Rôle d'un matériau amortissant

## 4.1 Historique

1930

A l'origine, que ce soit l'enceinte de Paul Voigt en Europe ou celle d'Onley aux USA, ces enceintes étaient dépourvues d'amortissant et devaient résonner énormément

### 4.1.1 Modèle de Bailey (1965)

- En 1965 Bailey [?] propose une colonne remplie de fibres de laine minérale pour atténuer les résonances. Il utilise un taux de remplissage de  $8\text{kg}/\text{m}^3$ . En fait Bailey s'occupait plus des problèmes de résonance dans les enceintes bass-reflex que des enceintes ouvertes à l'arrière. Il remarque que la vitesse du son dans le tube est affectée par le matériau. Il donne plusieurs considérations pratiques mais ne présente aucune équation ou méthode

### 4.1.2 Modèle de Bradbury (1976)

- En 76, intrigué par les conclusions de Bailey sur les fibres de laine qui seraient le meilleur matériau, Bradbury [6] décide de tester d'autres matériaux. Il pense que les fibres pourraient être utilisées non seulement pour atténuer les hautes fréquences mais également pour réduire la longueur de la ligne car le matériau diminuerait la vitesse du son.

Bradbury voulait comprendre pourquoi les fibres de laine sont si intéressantes pour construire une enceinte quart d'onde. Il note que si on utilise un package d'une densité  $8\text{kg}/\text{m}^3$ , elles atténuent fortement les ondes au-delà de 100 Hertz.

Aux plus basses fréquences il trouve que les fibres diminuent environ la vitesse du son de moitié. Il explique ce phénomène en imaginant que les fibres sont déplacées par le flux d'air généré par le HP.

- Aux basses fréquences en raison de la faible vitesse de déplacement, les fibres, entraînées par le flux de l'air seraient capables d'une certaine "mobilité". Il n'y aurait donc pas de "résistance" à l'écoulement, mais par contre une diminution de la vitesse du son, comme si fibres et air étaient pour ainsi dire "couplés" (associées par un coefficient d'amortissement visqueux). Cette diminution de la vitesse du son pouvait d'après lui être de moitié!

- Au fur et à mesure que l'on "monte" dans les fréquences, une transition s'opère. Le "couplage" diminue, la résistance à l'écoulement devient plus nette, sous l'effet de cette force aérodynamique, les fibres perdent leur mobilité et se stabilisent : la vitesse du son n'est plus ralentie, par contre

son amplitude est atténuée.

Il propose l'équation suivante :

$$P_D \frac{du_f}{dt} = R_f(v_a - v_f) \quad (4.1)$$

- $R_f$  est la résistance des fibres à l'écoulement , elle s'exprime en  $Nsm^{-4}$ ,
- $v_a$  est la vitesse de l'air
- $v_f$  est la vitesse des fibres,
- $P_D$  correspond au taux de remplissage utilisé, donc en  $Kg/m^3$ .
- $R_f$  s'exprime en fonction du diamètre  $d$  des fibres (0.005 mm pour la laine de roche) et vaut :

$$R_f = 27 \frac{\mu}{d^2} \left( \frac{P_D}{\rho_f} \right)^{1,4} \quad (4.2)$$

avec  $\rho_f$  est la densité de la fibre en elle-même,  $\mu$  est le coefficient de viscosité de l'air =  $1.81 * 10^{-5}kg/(msec)$

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$p(x) = p_0 e^{-\gamma x} = p_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

avec la constante de propagation complexe :

$$\gamma = \alpha + j\beta = j \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{(1 + P_D/\rho) + j\omega P_D/R_f}{1 + j\omega P_D/R_f}} \quad (4.3)$$

★ Si la partie réelle de  $\gamma$  vaut 0, alors  $\gamma = j\beta$  et les ondes se propagent de façon non atténuée avec une vitesse de phase  $v_p = \omega/\beta$ .

Dans la limite des hautes fréquences, nous avons  $\gamma = j\omega/c$ , si bien que la vitesse de phase aux hautes fréquences vaut  $v_p = c$ , c'est à dire la vitesse de phase d'une onde adiabatique.

Elle vaut  $c = \sqrt{\frac{\gamma_a P_0}{\rho}}$ ,  $\gamma_a$  étant le rapport des chaleurs massiques.

★ Toujours à partir de l'équation précédente (exprimant  $\gamma$ ), si la partie réelle de  $\gamma$  est nulle, la vitesse de phase devient  $v_p = \sqrt{\frac{\gamma_a P_0}{\rho + P_D}}$ , ce qui peut être interprété comme la vitesse de phase d'une onde adiabatique de densité effective  $\rho + P_D$ .

C'était l'hypothèse de Bradbury : Aux basses fréquences les fibres se "déplacent" à la même vitesse que les ondes acoustiques et donc les ondes ne sont pas atténuées.

Nous allons voir que par la suite cette hypothèse a été invalidée.

### 4.1.3 Le modèle d'AUGSPURGER (2000)

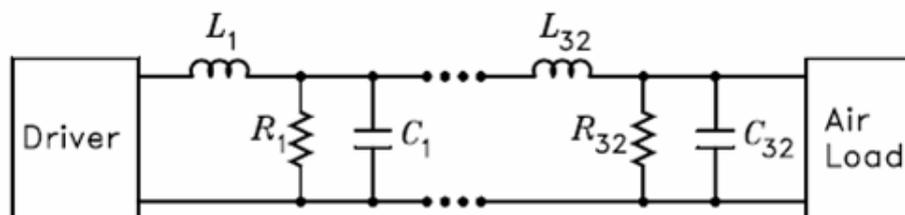


Fig 4.1 – Modèle d'AUGPURGER

AUGSPURGER [1] en 2000 développe un modèle électrique qui pouvait être utilisé pour simuler une ligne de transmission acoustique. Son modèle est une version modifiée du modèle de LOCANTHI développé pour les pavillons acoustiques.

AUGSPURGER ajoute des résistances pour tenir compte de l'atténuation du son par les fibres. Le modèle d'AUGSPURGER contient 32 sections avec résistances, inductances, et capacités qui modélisent les paramètres de la ligne.

Il fait varier les composants de chaque section pour modéliser les différentes géométries (évasée, rétrécie) et prend en compte différentes atténuations en fonction de la fréquence.

C'est un modèle électrique : Les inductances  $L_n = \frac{S}{\rho c^2} \Delta x$  modélisent la compliance de l'air, alors que les capacités  $c_n = \frac{\rho}{S} \Delta x$  modélisent la masse de l'air dans le tube.

Mais il n'indique pas comment il fait varier la valeur de la résistance en fonction de la fréquence ! Son modèle n'inclut pas les effets de la vitesse des fibres, il considère qu'il n'est pas certain que la vitesse des fibres soit importante.

Utilisant un programme de simulation, il répète plusieurs simulations de son modèle pour ajuster les valeurs en fonction du haut-parleur et du tube, ( Il rajoute des fonctions passe-bas du second ordre).

AUGSPURGER démontre qu'il est possible de modéliser une ligne de transmission acoustique comme une ligne de transmission électrique. Il montre de nombreux graphes avec différentes géométries, et de nombreux résultats. Les résultats simulés reproduisent exactement les résultats mesurés

### 4.1.4 Modèle de M.J. KING

King [9] effectue diverses expériences et mesures en employant du **Dacron Hollofil II**. Voici les résultats obtenus en montant un haut-parleur de fréquence de résonance  $f_0 = 34Hz$  sur un tube de longueur  $L = 1,23m$  :

Mode	$F$ calculées	$F$ mesurées (tube vide)	100g de Dacron	200g de Dacron	300g de Dacron	$c$ (m/s) avec 300mg Dacron
1/4 d'onde	67	94	94	94	91	
3/4 d'onde	200	214	205	199	193	315
5/4 d'onde	334	343	330	319	306	300
7/4 d'onde	467	475	454	439	428	299
9/4 d'onde	601	598	577	560	545	297
11/4 d'onde	734	727	703	686	669	298

Il fait ainsi les conclusions suivantes qui invalident l'hypothèse de Bradbury :

- pour la première fréquence de résonance, la présence de Dacron entraîne peu de modifications quant à la vitesse. Donc l'hypothèse de Bradbury n'est pas vérifiée, les fibres ne bougent pas.
- Si l'on regarde la vitesse du son la plus abaissée : 297 m/s, et si l'on suppose le processus adiabatique, en appliquant la formule :  $\rho_{(\text{air} + \text{fibres})} = (n\rho_0)(c_{\text{fibres}})^2$  (avec  $n = 1,4$  en supposant le processus adiabatique), cela voudrait dire que 1,30g de fibres seraient suffisants pour entraîner une telle diminution, alors que les 300 grammes utilisés feraient chuter la vitesse à 117m/s, ce qui est irréaliste.

Il en conclut donc que les fibres entraînent une atténuation par pertes visqueuses ainsi qu'une légère diminution de vitesse en raison d'un processus non adiabatique

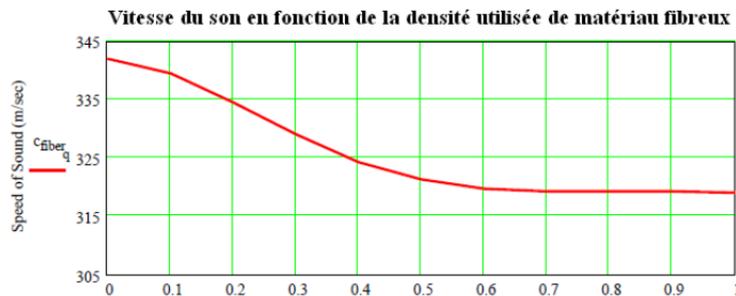


Fig 4.2 – Vitesse de propagation en fonction de la quantité de matériau fibreux utilisée

(A remarquer la vitesse minimale d'environ 319 m/s qui correspond à un processus en partie adiabatic, en partie isotherme.)

Il en conclut qu'il faut ajouter dans l'équation de propagation un terme dû à l'effet visqueux :

$$\frac{R_f \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}}{\rho_{air}}$$

, en utilisant respectivement des valeur pour  $c$  et des valeurs pour  $R_f$  en fonction de la quantité du matériau absorbant utilisé.

Nous avons alors l'équation suivante :

$$c^2 \frac{\partial}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{R_f \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}}{\rho_{air}} \quad (4.4)$$

King considère que les résultats obtenus sont déjà très satisfaisants en utilisant pour  $R_f$  une valeur proportionnelle au taux de remplissage :

$$R_{f_{dacron}} = \text{masse volumique} * m^3/kg * 98,125 \text{Newton.s}/m^4$$

La perte par effet visqueux pour un tube vide étant estimé à  $50 \text{Newton.s}/m^4$

Néanmoins les résultats sont insatisfaisant pour les fréquences inférieures à  $200\text{hz}$  avec notamment des valeurs surestimées.

Pour cette raison, son modèle comporte également différentes fonctions filtre passe haut, avec une fonction filtre passe haut débutant au second ordre, évoluant progressivement vers une fonction filtre de premier ordre au fur et à mesure que la fréquence baisse.

## 4.2 Modèle utilisé dans notre étude

Nous proposons ici un modèle électroacoustique par discrétisation, à partir de considérations tirées de notre expérimentation qui montre une très faible diminution de la vitesse du son notamment pour les basses fréquences (accréditation de l'hypothèse d'une transformation isotherme), ainsi qu'une atténuation des résonances parasites proportionnelle à la quantité de matériau fibreux employé, et des modèles proposé par AUGSPURGER, et J.M. King.

### 4.2.1 Modélisation par discrétisation

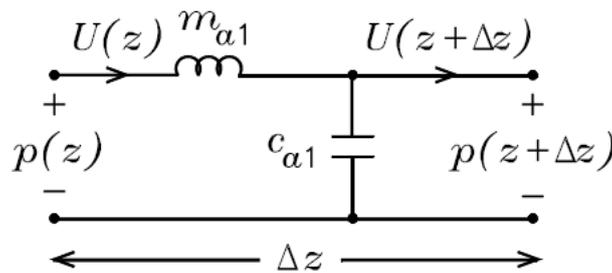


Fig 4.3 – Modèle sans absorbant

On peut considérer la ligne comme une succession de segments de longueur  $\Delta z$  ( $\Delta z$  étant la longueur de la ligne divisée par le nombre de segments). L'air dans chaque segment possède et une masse et une complianc acoustique. On suppose pour le moment la Ligne sans perte : chaque segment peut être modélisé par un circuit électrique équivalent dans lequel  $m_{a1}$  représente la masse acoustique de chaque segment et  $c_{a1}$  la complianc acoustique.  $q(z)$  correspond au débit à cet endroit, et  $p(z)$  la pression.

Nous avons les correspondances suivantes :

$$m_{aa} = \frac{\rho}{S} \quad (4.5)$$

$$c_{aa} = \frac{S}{\rho c^2} \quad (4.6)$$

$$m_{a1} = m_{aa}\Delta z \quad (4.7)$$

$$c_{a1} = c_{aa}\Delta z \quad (4.8)$$

La ligne peut donc être modélisée comme une suite d'éléments discrets. (Toutefois une solution exacte nécessiterait  $\Delta z$  tend vers 0)

Nous pouvons donc écrire les équations :

$$\begin{aligned} p(z + \Delta z) &= p(z) - q(z)j\omega m_{aa}\Delta z \\ q(z + \Delta z) &= U(z) - j\omega c_{aa}p(z + \Delta z)\Delta z \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{p(z + \Delta z) - p(z)}{\Delta z} &= -q(z)j\omega m_{aa} \\ \frac{q(z + \Delta z) - U(z)}{\Delta z} &= -j\omega c_{aa}p(z + \Delta z) \end{aligned}$$

i.e. lorsque  $\Delta z \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dp(z)}{dz} &= -j\omega m_{aa}q(z) \\ \frac{dU(z)}{dz} &= -j\omega c_{aa}p(z) \end{aligned}$$

On dérive la 1°, en tenant compte de la 2° :

$$\frac{d^2p(z)}{dz^2} + \omega^2 c_{aa}m_{aa}p(z) = 0$$

de même

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} + \omega^2 c_{aa}m_{aa}q(z) = 0$$

équations qui ont pour solutions :

$$p(z) = p_{0+}e^{-\gamma z} + p_{0-}e^{+\gamma z} \quad (4.9)$$

$$q(z) = q_{0+}e^{-\gamma z} + q_{0-}e^{+\gamma z} \quad (4.10)$$

avec

$$\gamma \text{ constante de propagation} = j\omega\sqrt{c_{aa}m_{aa}} \quad (4.11)$$

Puis nous avons :

$$\begin{aligned} q_{0+} &= \frac{p_{0+}}{Z_c} \\ q_{0-} &= \frac{-p_{0-}}{Z_c} \\ Z_c &= \sqrt{\frac{m_{aa}}{c_{aa}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma = j\omega\sqrt{c_{aa}m_{aa}}} \quad (4.12)$$

$$\boxed{Z_c = \sqrt{\frac{m_{aa}}{c_{aa}}}} \quad (4.13)$$

$$\boxed{Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + \tanh \gamma L}{Z_c + Z_L \tanh \gamma L}} \quad (4.14)$$

#### 4.2.2 Caractéristiques des matériaux fibreux

Un débit d'air circulant au travers d'un matériau fibreux engendre une pression  $P = R_a q$ . Mais également, les fibres sont susceptibles d'un léger déplacement sous l'effet mouvement de l'air.

Il faut donc introduire les effets de masse mécanique et les effets de raideur dans le système. L'unité de la résistance acoustique est  $Nsm^{-5}$  La résistance acoustique est proportionnelle à la vitesse de l'air et dépend des caractéristiques physiques du matériau traversé.

Pour une même densité utilisée, les fibres de petit diamètre produisent une plus grande résistance que les fibres de gros diamètre. La disposition des fibres a également son importance. Les fibres peuvent être orientées parallèlement ou perpendiculairement au flux de l'air, ou encore disposées de façon aléatoire. Bien sûr les fibres disposées dans le sens du flux de l'air opposent une moins grande résistance.

Bien que ces matériaux semblent avoir un comportement qui dépend de la fréquence vibratoire de l'air, les effets les plus importants sont ceux qui sont liés à la **résistance à l'écoulement**.

La résistance à l'écoulement correspond au paramètre qui relie variation de pression par unité de longueur, à la vitesse mécanique des particules de l'air circulant au travers du matériau.

Classiquement on la mesure ainsi :

$$p_s = R_f l_s u_a$$

$p_s$  est la variation de pression au travers de l'échantillon,

$R_f$  la résistance au flux (unité de  $R_f$  en  $Nsm^{-4}$ ),

$l_s$  est la longueur de l'échantillon,

$u_a$  la vitesse particulaire .

Par simplification d'écriture, retenons l'équation

$$R_a = \frac{R_f \cdot l}{S} \quad (4.15)$$

qui permet d'exprimer la résistance acoustique en fonction de la résistance au flux

Au final, gardons en mémoire les relations suivantes :

$p_a = R_f l u$ , relation qui relie la pression (acoustique) avec la vitesse (mécanique),  
 $p = R_f l U / S$ .

Et comme  $p = R_a U$ , nous avons :

$R_a = R_f l / S$  ( $R_f$  en  $Nsm^{-4}$ ;  $R_a$  en  $Nsm^{-5}$ )

### 4.2.3 Modèle utilisé avec fibres absorbantes

Le modèle utilisé prend en compte le couplage de la colonne d'air avec les éléments mécaniques du matériau fibreux, à savoir :

- D'un côté : la résistance à l'écoulement du flux d'air  $R_f$ . C'est l'élément principal. Il est fonction de la concentration de fibres utilisées, de leur densité propre, et du diamètre des fibres, selon la formule :

$$\frac{27 \mu}{4 d^2} \left( \frac{Pack_{densité}}{\rho_{fibres}} \right)^{1.4}, \quad (4.16)$$

( $\mu$  étant la viscosité de l'air)

- De l'autre, sa masse  $m_{mf}$ , sa raideur  $c_{mf}$ , sa résistance mécanique  $r_{mf}$  : les fibres agissent comme un ressort.

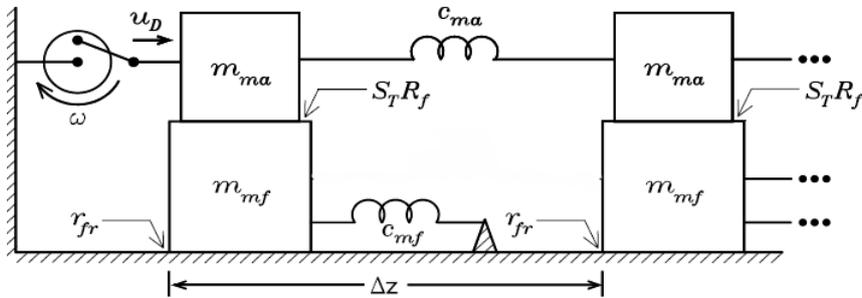


Fig 4.4 – Modèle avec fibres (mécanique)

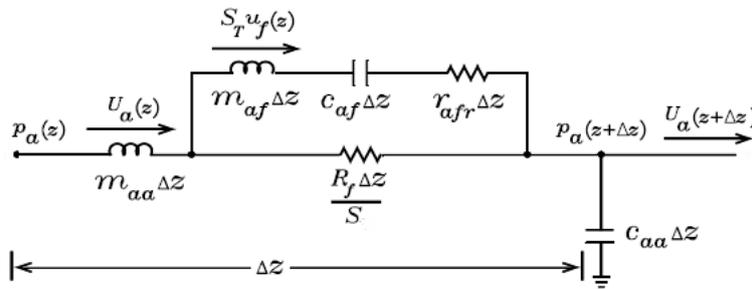


Fig 4.5 – Modèle avec fibres (acoustique)

De ces schémas nous en déduisons les équations suivantes :

$$Z_c = \sqrt{\frac{[j\omega m_{aa} + (j\omega m_{af} + r_{afr} + (j\omega c_{af})^{-1})] ||R_f/S}{j\omega c_{aa}}} \quad (4.17)$$

$$\gamma = \sqrt{[j\omega m_{aa} + (j\omega m_{af} + r_{afr} + (j\omega c_{af})^{-1})] ||R_f/S} \cdot j\omega c_{aa} \quad (4.18)$$

Remarquons que l'on pourrait encore plus simplifier le modèle en ne tenant compte que de  $R_f$ , nous aurions alors :

$$\gamma = \sqrt{j\omega c_{aa}(j\omega m_{aa} + R_f/S)}$$

et

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega m_{aa} + R_f/S}{j\omega c_{aa}}}$$

#### 4.2.4 Commentaires sur l'Impédance acoustique de la ligne avec absorbant

**Modification de la constante de propagation :** On est amené à définir une nouvelle constante de propagation  $\gamma$  de valeur complexe de la forme

$$\alpha + j\beta$$

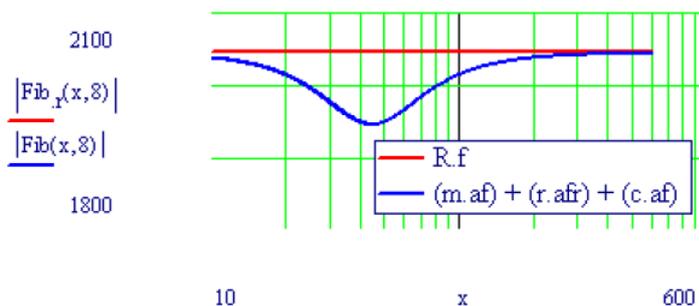
**Une augmentation de la partie réelle** se traduit par une atténuation de la courbe.

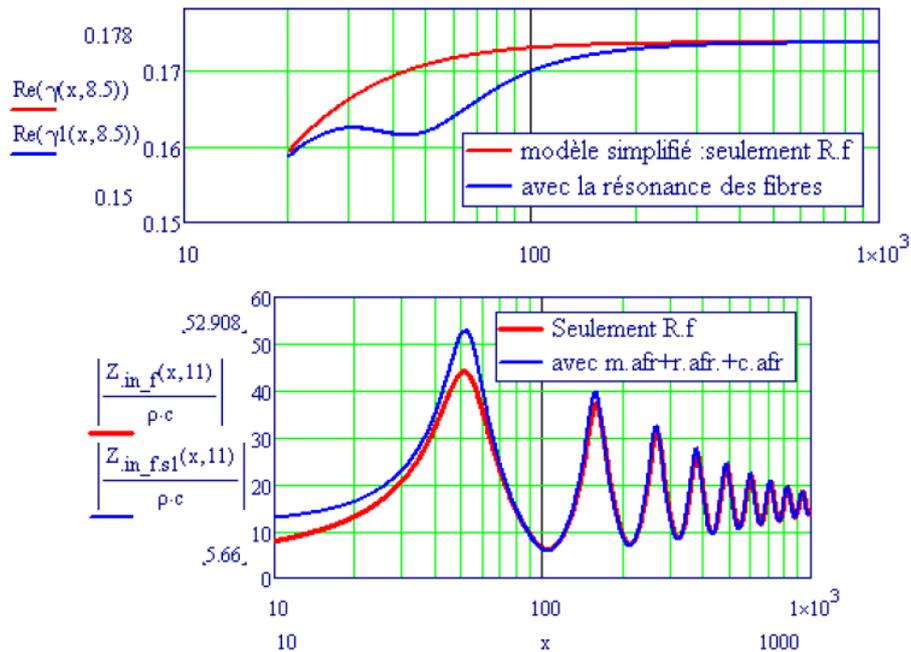
$R_f$  est l'élément déterminant qui entraîne l'atténuation des ondulations.

Le circuit avec  $j\omega m_{af} + r_{afr} + j\omega c_{af}$  se traduit par une petite résonance des fibres. Ces fibres entrent en résonance pour une fréquence :

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{m_{mf}c_{mf}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{P_D c_{af}}} \quad (4.19)$$

(Environ entre 40 et 100 hertz, plus le taux de garnissage augmente, plus la fréquence de résonance augmente). Autour de cette valeur là, l'onde sonore se déplace en même temps que les fibres. Il y a donc dans cette zone, une atténuation légèrement moins importante.



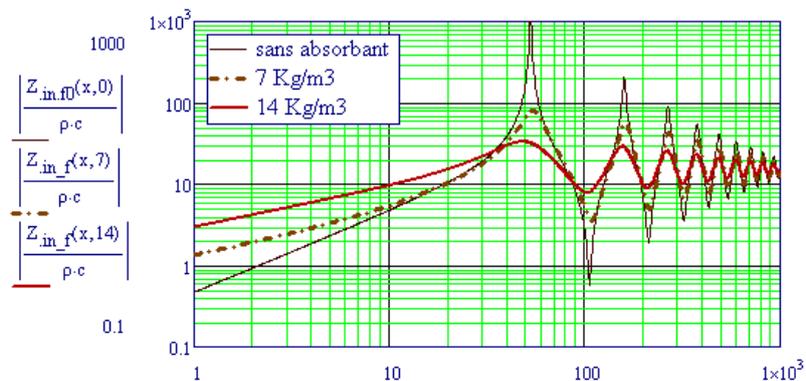


En fait au bout du compte l'écart est minime (parce qu'il faut tenir compte du fait que l'essentiel du débit passe par  $R_f$  dans notre modèle). Cela se traduit par 2 ou 3 db de mieux dans cette zone.

- **Une augmentation de la partie imaginaire** se traduit par un décalage des pics vers la gauche. Si on regarde les expressions, la partie imaginaire est bien modifiée, mais insuffisamment pour que cela se voit sur les courbes

**Modification de  $Z_c$**  La modification de  $Z_c$  se traduit par une légère "remontée" de la courbe dans son ensemble.

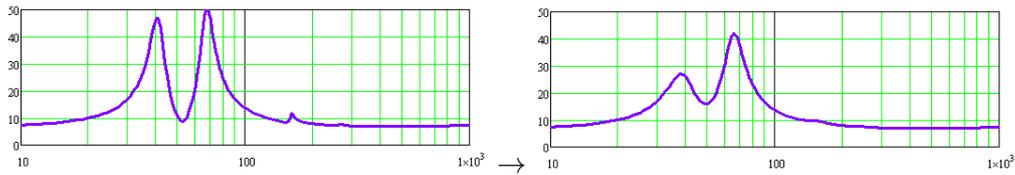
### Courbes de l'impédance acoustique



Sur les graphes, on voit avec évidence que les réflexions parasites diminuent avec l'augmentation du taux de remplissage des fibres. Comme prévu, la résistance augmente en fonction de la masse volumique utilisée.

Au fur et à mesure que la densité augmente, l'impédance à basse fréquence passe d'une réactance (partie imaginaire de l'impédance) de masse (inductance), à une réactance de capacité. La pente s'adoucit, pour aller jusqu'à un niveau de pure résistance.

### Modification de l'impédance électrique



Lorsque l'on regarde la courbe de l'impédance électrique, on observe un léger décalage des pics vers la gauche. Ce décalage ne peut s'expliquer par nos équations et serait à interpréter comme un léger processus isotherme, les phénomènes étant lents à ces fréquences, des petits échanges thermiques peuvent avoir lieu.

### 4.2.5 Détermination des paramètres

Nous avons donc besoin de déterminer  $R_f$ ,  $m_{af}$ ,  $c_{af}$ ,  $rafr$ ,

★  $R_f$  : A condition que l'on puisse mesurer l'impédance acoustique, la valeur de  $R_f$  est obtenue en mesurant l'asymptote de la courbe d'impédance acoustique à basse fréquence (Grosso modo on regarde vers 10 Hz). La valeur de l'impédance aux basses fréquences étant  $R_{fa}$ , nous avons :

$$R_f = \frac{R_{fa}}{S_L} \quad (4.20)$$

Sinon, nous avons déjà vu que  $R_f$  pour des fibres de densité propre  $\rho_{fibres}$  est donné par la formule empirique :

$$R_f = 27 \frac{\mu}{d^2} \left( \frac{P_D}{\rho_f} \right)^{1,4} \quad (4.21)$$

$\rho_f$  est la densité de la fibre en elle-même,  $\mu$  est le coefficient de viscosité de l'air =  $1.81 \cdot 10^{-5} kg / (msec)$ . Dans le cas de la laine de verre que nous utilisons, et à partir des confrontations de différentes mesures, on aboutit aux approximations suivantes :

$$R_f(P_D) = 27.3 P_D^{2.3} \quad (4.22)$$

L'équation  $R_f(P_D) = 27.3 P_D^{2.3}$  est à peu près de la même forme que celle utilisée par Bradbury. En gros obtient des valeurs pour  $R_f$  qui oscillent entre 100 et 1000  $Nsm^{-4}$ . Pour être plus précis, il faudrait rajouter que  $R_f$  a tendance à devenir plus important pour les hautes fréquences et donc à provoquer une atténuation plus importante.

★  $\mathbf{m}_{af}$  est donné par la relation :

$$m_{af} = \frac{P_D}{S} \quad (4.23)$$

★  $\mathbf{c}_{af}$  ( $c_{af} = S^2 c_{mf}$ ) : Comme les fibres sont fixées aux parois, à ce niveau (aux parois) la compliance peut être considérée comme nulle. Elle augmente par contre au fur et à mesure que l'on se rapproche du centre. Pour une colonne de grande section, la compliance entre les fibres et la paroi  $c_{mf}$  est moins significative que pour ne colonne de petite section. Une mesure de la compliance des fibres dans une colonne de faible section donne une indication de la valeur  $\mathbf{c}_{mf}$ . A partir de différentes mesures, TARNOW [15] propose approximation :

$$c_{af}(P_D) = S^2 \frac{1}{407 P_D^{22}} \quad (4.24)$$

★  $\mathbf{r}_{afr}$  : Une mesure directe de  $r_{afr}$  s'avère difficile. Dans notre étude,  $r_{afr}$  est considéré comme un paramètre général qui modélise les pertes et estimé en fonction des courbes obtenues. On l'estime ici à 20000. C'est un paramètre qui a peu d'influence.

★  $\mathbf{c}_{aa}$  s'obtient par :

$$c_{aa} = \frac{S}{\gamma P} = \frac{S}{1,4 * 1.013 * 10^5} \quad (4.25)$$

Lorsqu'il y a de l'absorbant, il peut y avoir des transferts de chaleur. Ce qui tend à réduire les variations de température, et entraîner un processus isotherme. C'est ce qui se produit pour les basses fréquences lorsque la période de l'onde est longue. Si la température de l'air ne change pas avec la pression, le rapport  $\gamma$  peut descendre à 1. En pratique on considère qu'il varie entre 1 et 1,4, et que les échanges ne se produisent pas pour les hautes fréquences. Nous avons donc  $\frac{S}{1.4 P_0} \leq c_{aa} \leq \frac{S}{1. P_0}$ . Si  $r_{afr} \Delta z \ll R_f \Delta z / S$ , il s'en suit que fibres et vitesse de l'air sont approximativement égaux lorsque les fibres sont proches de leur valeur de résonance, car le circuit en série qui modélise les fibres a une impédance minimale de  $r_{afr} \Delta z$  à la fréquence de résonance des fibres.

Selon notre modèle, la fréquence de résonance de ces fibres est donnée par l'équation :

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{m_{mf} c_{mf}}} \quad (4.26)$$

Comme fibres et air tendent à se déplacer ensemble à cette fréquence, la masse acoustique n'est pas augmentée par les fibres. Donc toute masse acoustique venant en addition, correspond aux fibres modélisées en série par  $R_f$

Les valeurs de  $c_{af}$  et  $r_{afr}$  peuvent être déterminées à partir des valeurs correspondant à la résonance minimale sur les courbes d'impédance. La fréquence de résonance des 3 éléments en série :  $c_{af} \Delta z$ ,  $c_{af} \Delta z$ , et  $r_{afr} \Delta z$ , est approximativement donnée par :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{P_D c_{af}}} \quad (4.27)$$

Comme on peut mesurer  $f_r$ , on peut évaluer  $c_{af}$ .  $r_{afr}$  peut être ajustée en fonction de la profondeur et de la largeur du minima de  $f_r$ .

**Caractéristiques des fibres de laine de verre :**

- **R<sub>f</sub>** : A partir des confrontations de différentes mesures, nous avons déjà indiqué l'équation suivante :

$$R_f(P_D) = 27.3P_D^{2.3} \quad (4.28)$$

- **c<sub>mf</sub>** : De même à partir de différentes mesures, nous obtenons :

$$c_{mf}(P_D) = \frac{1}{407P_D^{2.2}} \quad (4.29)$$

On remarquera que pour deux colonnes de longueur identique, mais de section différente, alors que dans le cas d'une colonne vide, la section n'influe pas sur la localisation des valeurs de résonance, mais seulement sur l'amplitude de l'impédance, dans le cas d'une colonne avec absorbant, les pics de résonance se déplacent vers la gauche d'autant plus que la section est grande. La valeur de résonance de la fibre varie de façon inversement proportionnelle à celle de la section de la colonne. Selon notre modèle, la fréquence de résonance de ces fibres est donnée par l'équation :

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{m_{mf}c_{mf}}}$$

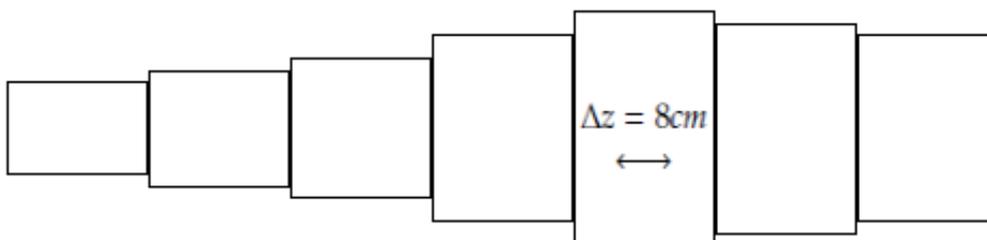
Lorsque la section augmente, la masse de fibre par unité de longueur  $m_{mf} = P_D S$  augmente, et la fréquence de résonance s'abaisse.

- **r<sub>mfr</sub>** La résistance mécanique des fibres  $r_{mfr}$  est également déterminée expérimentalement : On peut grosso modo évaluer cette résistance à

$$r_{mfr} = 3P_D \quad (4.30)$$

## 5 Deux formes optimisées

Nous pouvons calculer la charge de n'importe quelle forme complexe, en décomposant la colonne en une suite de  $n$  éléments discrets ( $\Delta z =$  environ 8cm) et en effectuant un produit matriciel de chaque élément :



$$\begin{bmatrix} p_{in} \\ q_{in} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_i \Delta z) & Z_{c_i} \sinh(\gamma_i \Delta z) \\ \frac{\sinh(\gamma_i \Delta z)}{Z_{c_i}} & \cosh(\gamma_i \Delta z) \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} p_L \\ q_L \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Pour chaque élément, nous avons donc une nouvelle section, d'où une valeur de  $\gamma$  et de  $Z_c$  spécifique. Nous avons également subdivisé la colonne en quatre parties, pour pouvoir envisager de concentrations de matériau absorbant différentes (en générale on laisse le dernier quart vide). Nous avons ainsi construit deux nouvelles formes.

Ces deux formes étant très longues, elles nécessitent d'être "repliées". On démontre que pour évaluer la "nouvelle longueur", on peut considérer que la longueur de la ligne passant par la moyenne quadratique des rayons de courbure interne et externe, est une bonne approximation.

## 5.1 Colonne droite

$$L = 2,2m, S_0 = S_L = 16 * 20cm^2$$

Taux de remplissage avec laine de verre :  $12kg/m^3$

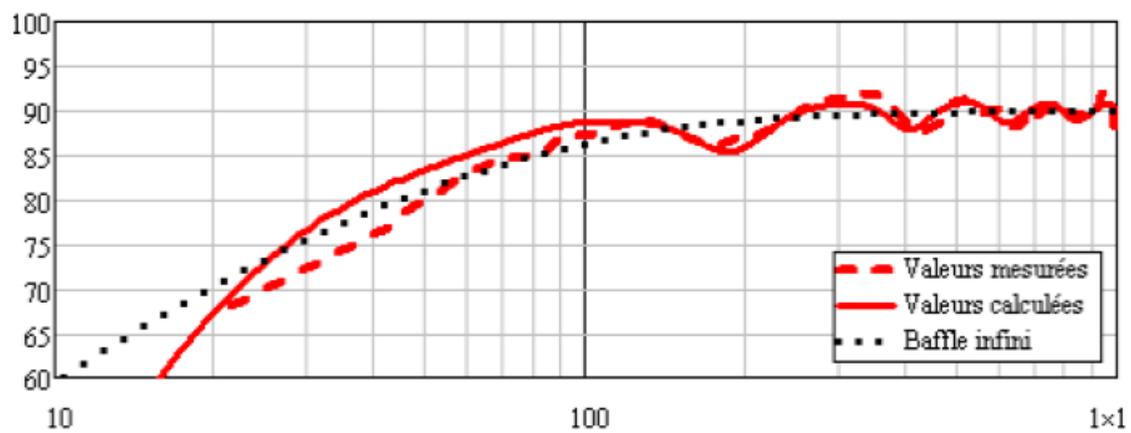
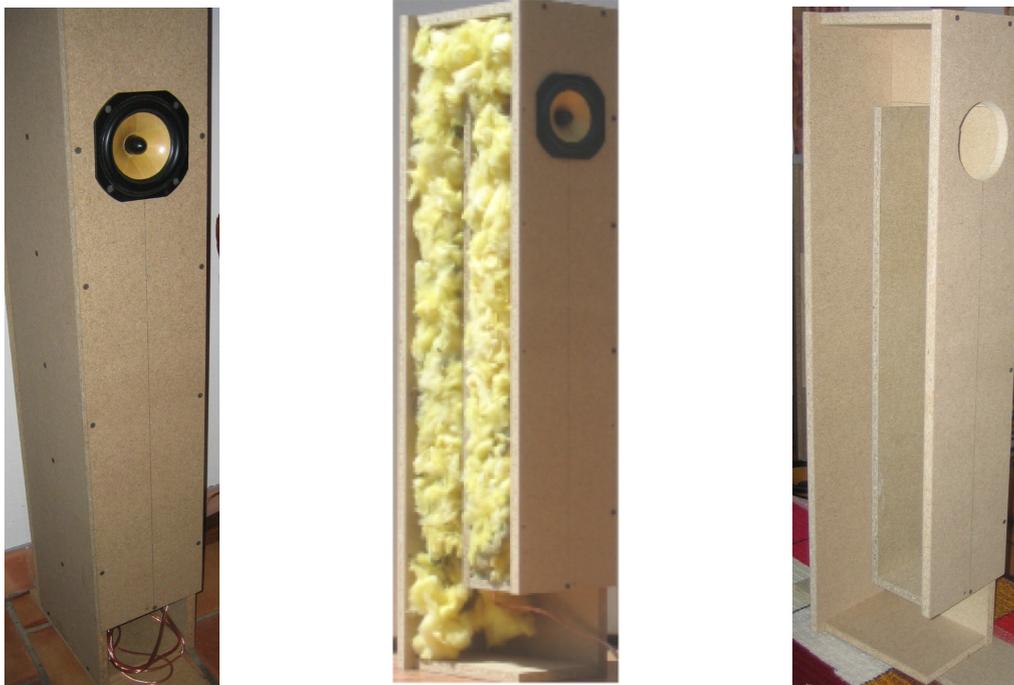


Fig 5.1 – Forme droite optimisée

## 5.2 Colonne évasée terminée par un évent

$L = 2,2m$ , évasée ( $S_0 = 50cm^2$ ,  $S_L = 29 * 36cm^2$ , repliée, terminée par un évent  $l_e = 2cm$ ,  $S_e = 100cm^2$ )

Haut-parleur situé à 45% du début de la ligne

Taux de remplissage avec de la laine de verre, environ  $6kg/m^3$

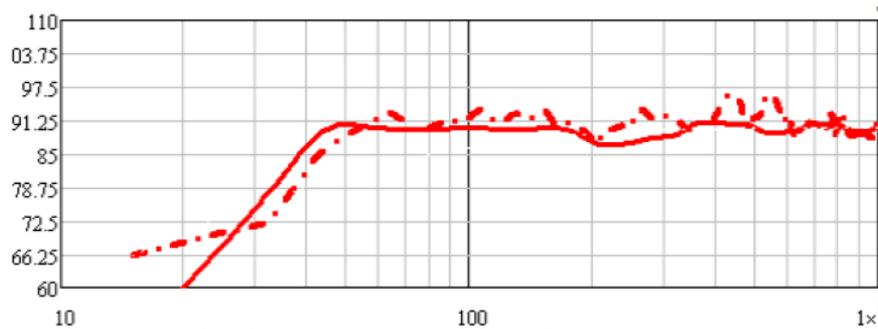
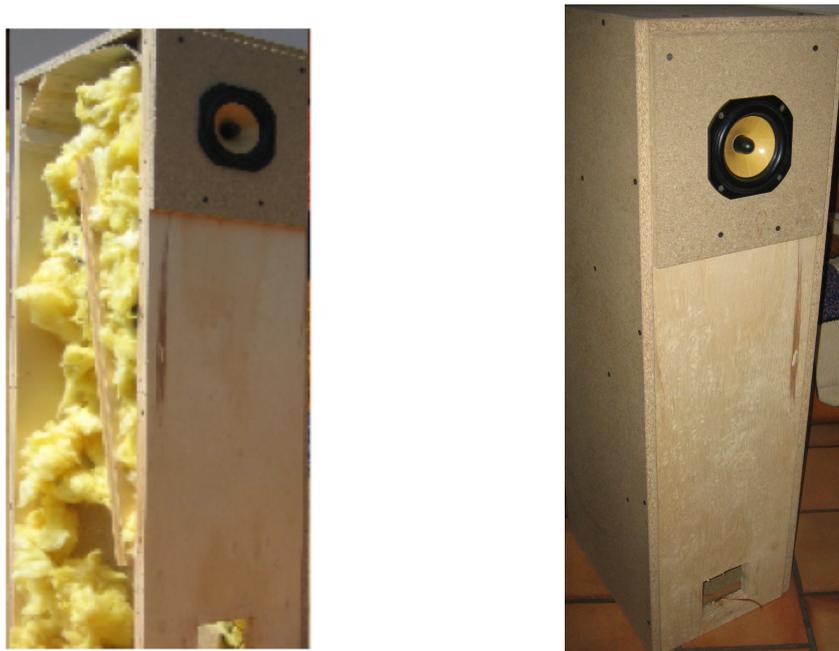
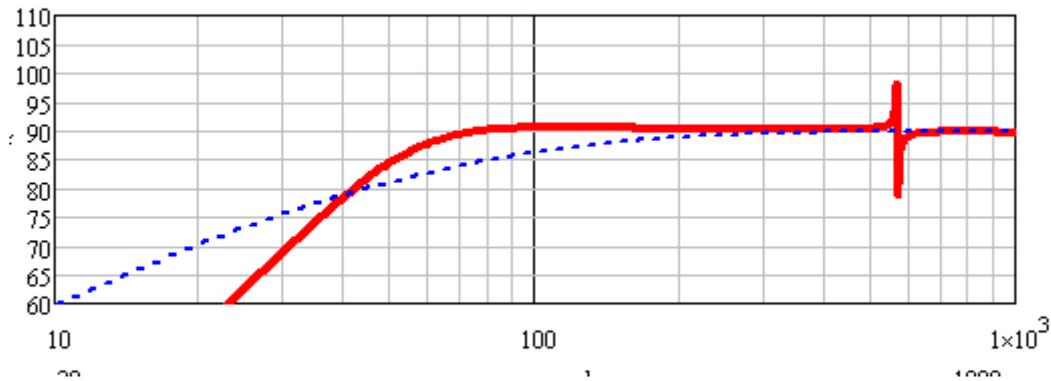


Fig 5.2 – Forme évasée optimisée

Cette enceinte descend plus bas dans le grave. La courbe théorique est assez plate. On remarque des irrégularités dans la courbe correspondant aux valeurs mesurées, mais il faut indiquer que la caisse n'a pas été renforcée, et également que le local d'écoute génère de nombreuses résonance parasites.

Pour mémoire, on rappelle la courbe obtenue par simulation d'une construction bass-reflex avec alignement type BB4 :



On remarque que la charge TQWT permet d'obtenir 91 db à 50 hertz, alors que la charge bass-reflex ne permet d'obtenir que 85 db à 50 hertz.

Bien sûr nous vu que ces enceintes accordées en quart d'onde nécessitent la plupart du temps un volume extrêmement important. Toutefois, nous avons pu démontrer que le principe reste très efficace pour obtenir un niveau de grave très important.

Le modèle mathématique présenté ne permet pas de proposer d'emblée quelle serait la meilleure configuration pour un haut-parleur donné. Les variations possibles dans la construction d'une enceinte à ligne de transmission sont tellement nombreuses, position du haut-parleur, taux de remplissage avec de l'absorbant géométrie de la colonne d'air, qu'il est nécessaire de faire de nombreuses simulations. C'est le prix à payer pour obtenir la meilleure configuration possible en fonction des objectifs recherchés.

## 6 Conclusion

Cette étude a permis d'établir une modélisation permettant de mieux de comprendre le fonctionnement de la colonne d'air couplée à un haut-parleur. Elle fournit des bases sérieuses pour élaborer dans de bonnes conditions une telle charge. L'atténuation des résonances demeure difficile, Les mesures auraient été plus précise en disposant d'une chambre sourde, voire d'un dispositif de mesure de l'impédance acoustique.

En conclusion :

L'étude confirme la possibilité d'obtenir une restitution importante dans les sons graves. Pour être complète, l'étude devrait être poursuivie avec d'autres haut-parleurs, (et des instruments de mesure plus précis).

En raison du grand nombre de paramètres ajustables, la ligne de transmission peut s'adapter à une large gamme de haut-parleurs, la réponse acoustique peut être modulée, allant d'un grave profond pour le home- cinéma à des atténuations plus douces recherchées en Hi Fi.

Il y a donc une grande variabilité de réponses possibles. C'est cet éventail qui rend la recherche d'une bonne solution compliquée.

Certaines solutions se rapprochent d'autres concepts, certaines solutions nécessitent un encombrement important, et un certain coût de fabrication, tout est affaire de compromis.

# 7 Feuille de calcul pour élaborer une charge accordée en quart d'onde

## Géométrie de la colonne

$L$  représente sa longueur totale

$S_0$  sa section au niveau de l'extrémité fermée

$S_L$  sa section au niveau de l'extrémité ouverte

$\Delta_s$  représente la longueur choisie pour chaque élément discrétisé (ici 8 cm)

$l_e$  et  $s_e$  la longueur et la section d'un éventuel évent

$\alpha$  la position du haut-parleur sur la ligne à partir de l'extrémité fermée exprimée en pourcentage de la longueur totale

On "délimite" ainsi  $n$  morceaux de colonne,  $n = L$

*DeltaZ*

Pour chaque morceau numéroté  $i$  de 1 à  $n$ , nous avons une section  $S(i) = \left[ \frac{l(i)(\sqrt{S_L} - \sqrt{S_0}) + L\sqrt{S_0}}{L} \right]^2$

## Impédance de rayonnement $Z_L$

$Z_L$  est donné par la formule (2.20)

## matériau absorbant

Pour modéliser l'effet du matériau absorbant, nous avons besoin :

Du taux de remplissage volumétrique  $P_D$  en  $kg/m^3$

La résistance des fibres  $R_f$  est donnée par la formule (4.21) ou (4.22)

La masse acoustique  $m_{af}$  est donnée par l'équation (4.23)

La compliance acoustique  $c_{af}$  est donnée par l'équation (4.24)

$r_{afr}$  est estimé à 2000

La résistance mécanique des fibres  $r_{mfr}$  est donnée par la formule (4.30)

## constante de propagation $\gamma$

Pour déterminer la constante de propagation  $\gamma$ , nous avons également besoin de :

La compliance acoustique de l'air par unité de longueur  $c_{aa}$  est donné par l'équation (4.6)

De la masse acoustique par unité de longueur  $m_{aa}$  donnée par l'équation (4.5)

Enfin l'expression de  $\gamma$  est donné par l'équation (4.18)

L'expression de l'impédance caractéristique  $Z_c$  est donnée par l'équation (4.17)

### **calcul matriciel pour obtenir l'impédance de charge**

A partir de là il suffit de procéder à un calcul matriciel pour déterminer l'impédance totale de charge de la colonne

On différencie les calculs selon que l'on se situe côté extrémité fermée, ou côté extrémité ouverte (voir équation (3.26) et (3.27) )

Notons que l'on peut encore "subdiviser" le calcul en différentes parties (Dans l'exemple qui suit : 3 parties), notamment si l'on a utilisé des taux de remplissage différents sur la longueur de la colonne. En pratique on conseille expérimentalement de mettre peu ou pas d'absorbant dans le dernier tiers côté extrémité ouverte.

Enfin on n'oubliera pas de "rajouter" une matrice pour l'évent.

### **Impédance électrique**

Pour obtenir le graphe de l'impédance électrique, on utilise donc l'équation (2.5) en entrant l'expression appropriée de  $Z_{in}$ .

### **Niveaux de pression acoustique**

Enfin, la courbe finale qui intéressera le plus l'utilisateur sera donnée par l'équation (2.30) après avoir entré bien entendu les valeurs appropriées de débit.

**Feuille de calcul pour une enceinte à Ligne de transmission avec possibilité d'utiliser des sections variables, 1 événement, et de la laine de roche à des densités variables,**  
CONSTANTES



$$\begin{aligned} \rho &:= 1.2 & \rho_{aa} &:= 342 \\ \omega(x) &:= 2 \cdot \pi \cdot x & \gamma_0 &:= 1.4 \\ c_{aa} &:= \frac{S}{\rho \cdot c^2} & l_v &:= 4 \cdot 10^{-8} & l_t &:= 5.6 \cdot 10^{-8} \\ r &:= \sqrt{\frac{S}{\pi}} & k(x) &:= 2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{c} \\ m_{aa} &:= \frac{\rho}{S} & \beta_v(x) &:= (2l_v \cdot k(x))^{\frac{1}{2}} & \beta_t(x) &:= (\gamma_0 - 1)(2l_t \cdot k(x))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



**Géométrie de la colonne**

$$L := 2.35 \quad S_0 := 50 \cdot 10^{-4} \quad S_L := 29 \cdot 36 \cdot 10^{-4} \quad \Delta z := 0.1 \quad \text{Position du HP } \alpha := 0.5 \quad \text{évent } l_e := 0.02 \quad s_e := 100 \cdot 10^{-4}$$



**Section fermée**  $L_f := \alpha \cdot L \quad n_f := \text{round}\left(\frac{\alpha \cdot L}{\Delta z}, 0\right) \quad l_f(i) := i \cdot \alpha \cdot \frac{L}{n_f}$

**Nb de "cellules"**  $n := \text{round}\left(\frac{L}{\Delta z}, 0\right) \quad l(i) := i \cdot \Delta z$

**Section ouverte**  $L_o := L - L_f \quad n_o := n - n_f$

**Indiciel**

$$S(i) := \left[ \frac{l(i) \cdot (\sqrt{S_L} - \sqrt{S_0}) + L \cdot \sqrt{S_0}}{L} \right]^2$$

$$S(i) := \frac{S(i-1) + S(i)}{2}$$

récapitulatif

$$\begin{aligned} L_f = 1.175 & \quad n_f = 12 & n_f \cdot \Delta z = 1.2 & \quad L_f = 1.175 & S(1) = 5.817 \times 10^{-3} & \quad S_0 = 5 \times 10^{-3} \\ L_o = 1.175 & \quad n_o = 12 & n_o \cdot \Delta z = 1.2 & \quad L_o = 1.175 & S(n) = 0.104 & \quad S_L = 0.104 \end{aligned}$$

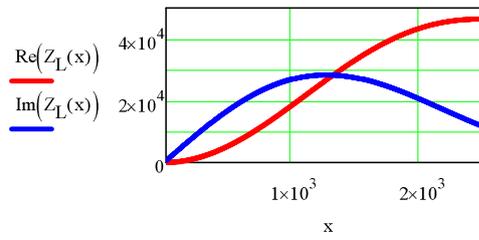


**Impédance de rayonnement**



$$HI(x) := \frac{2}{\pi} - J_0(x) + \int_0^1 \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \cos(x \cdot t) \, dt \quad r_L := \sqrt{\frac{s_e}{\pi}}$$

$$Z_L(x) := \rho \cdot \frac{c}{s_e} \cdot \left( 1 - \frac{J_1(2 \cdot k(x) \cdot r_L)}{k(x) \cdot r_L} + j \cdot \frac{HI(2 \cdot k(x) \cdot r_L)}{k(x) \cdot r_L} \right)$$



**ABSORBANT**  $P_D := 12$

$$m_{aa}(i) := \frac{\rho}{S(i)} \quad s_{aa}(i) := \frac{S(i)}{\rho \cdot c^2} \quad z_{caa}(x, i) := \frac{1}{j \cdot \omega(x) \cdot c_{aa}(i)}$$

$$R_f(M_v) := \dots \quad R_f(5) = 1.106 \times 10^3 \quad r_{af}(i) := \frac{r_{fr}}{S(i)^2} \quad r_{fr} := 15 \quad r_{af}(21) = 2.094 \times 10^3$$

$$c_{mf}(M_v) := \frac{1}{407 \cdot (M_v)^{2.2}} \quad c_{af}(i, M_v) := S(i)^2 \cdot c_{mf}(M_v) \quad m_{af}(i, M_v) := \frac{M_v}{S(i)}$$

$$Fib_1(i, x, M_v) := \left( j \cdot \omega(x) \cdot m_{af}(i, M_v) + r_{af}(i) + \frac{1}{j \cdot \omega(x) \cdot c_{af}(i, M_v)} \right) \quad Fib_2(x, M_v) := R_f(M_v)$$

$$Fib(i, x, M_v) := \frac{Fib_1(i, x, M_v) \cdot Fib_2(x, M_v)}{Fib_1(i, x, M_v) + Fib_2(x, M_v)}$$

$$Z_{c\_fib}(i, x, M_v) := \sqrt{\frac{[(j \cdot \omega(x) \cdot m_{aa}(i)) + Fib(i, x, M_v)]}{j \cdot \omega(x) \cdot c_{aa}(i)}}$$

$$\gamma(i, x, M_v) := \sqrt{[(j \cdot \omega(x) \cdot m_{aa}(i)) + Fib(i, x, M_v)] \cdot j \cdot \omega(x) \cdot c_{aa}(i)}$$

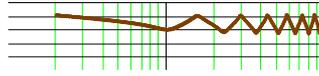
$$M(i, x, M_v) := \begin{pmatrix} \cosh(\gamma(i, x, M_v) \cdot \Delta z) & Z_{c\_fib}(i, x, M_v) \sinh(\gamma(i, x, M_v) \cdot \Delta z) \\ \frac{\sinh(\gamma(i, x, M_v) \cdot \Delta z)}{Z_{c\_fib}(i, x, M_v)} & \cosh(\gamma(i, x, M_v) \cdot \Delta z) \end{pmatrix}$$

**Calcul Matriciel**

**Extrémité fermée**  $M_{v,f} := P_D$

$$T_f(x) := \prod_{i=n_f}^1 M(i, x, M_{v,f}) \quad A_f(x) := T_f(x)_{0,0} \quad C_f(x) := T_f(x)_{1,0}$$

**Impédance extrémité fermée**  $Z_{in_v,f}(x) := \frac{A_f(x)}{C_f(x)}$



**Extrémité ouverte**  $n_o = 12$

**Premier tiers**  $M_{v1} := P_D$

$$T_1(x) := \prod_{i=n_f+1}^{\text{round}\left(\frac{L_f}{\Delta z} + \frac{L_o}{3\Delta z}, 0\right)} M(i, x, M_{v1}) \quad \text{round}\left(\frac{L_f}{\Delta z} + \frac{L_o}{3\Delta z}, 0\right) = 16$$

**Deuxième tiers**  $M_{v2} := P_D$

$$T_2(x) := \prod_{i=1+\text{round}\left(\frac{L_f}{\Delta z} + \frac{2 \cdot L_o}{3\Delta z}, 0\right)}^{\text{round}\left(\frac{L_f}{\Delta z} + \frac{2 \cdot L_o}{3\Delta z}, 0\right)} M(i, x, M_{v2}) \quad \text{round}\left(\frac{L_f}{\Delta z} + \frac{2 \cdot L_o}{3\Delta z}, 0\right) = 20$$

**Troisième tiers**  $M_{v3} := 0.5 \cdot P_D$

$$T_3(x) := \prod_{i=\text{round}\left(\frac{L_f}{\Delta z} + \frac{2 \cdot L_o}{3\Delta z}, 0\right)+1}^{\text{round}\left(\frac{L_f+L_o}{\Delta z}, 0\right)} M(i, x, M_{v3}) \quad \text{round}\left(\frac{L_f+L_o}{\Delta z}, 0\right) = 24$$

**évent**

$$M_e(x) := \begin{bmatrix} \cos(k(x)l_e) & j \cdot \rho \cdot \frac{c}{s_e} \cdot \sin[k(x) \cdot l_e] \\ j \cdot \left(\rho \cdot \frac{c}{s_e}\right)^{-1} \cdot \sin[k(x) \cdot l_e] & \cos(k(x)l_e) \end{bmatrix}$$

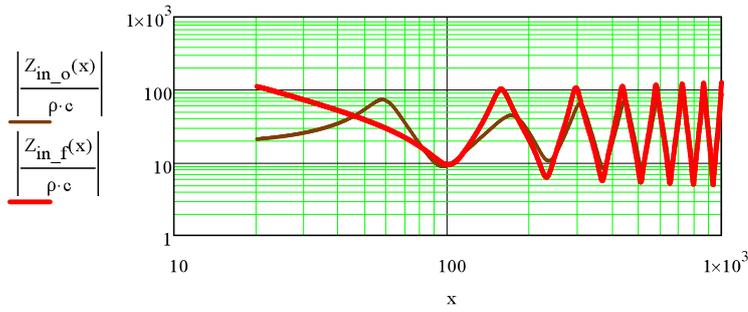
**Total extrémité ouverte**

$$T(x) := T_1(x) \cdot T_2(x) \cdot T_3(x) \cdot M_e(x)$$

$$A_o(x) := T(x)_{0,0} \quad B_o(x) := T(x)_{0,1} \quad C_o(x) := T(x)_{1,0} \quad D_o(x) := T(x)_{1,1}$$

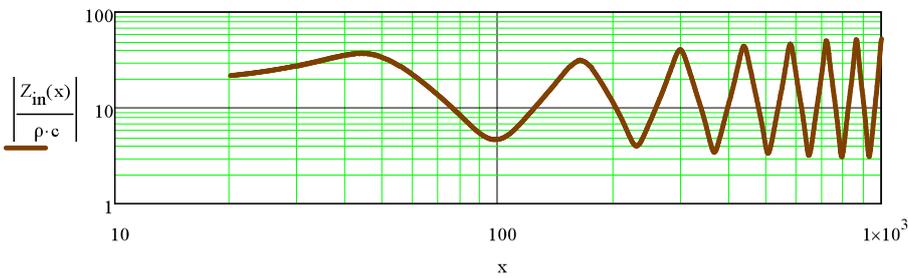
**Impédance côté ouvert**

$$Z_{in_o}(x) := \frac{A_o(x) \cdot Z_L(x) + B_o(x)}{D_o(x) + C_o(x) \cdot Z_L(x)}$$



### Impédance totale de la Ligne

$$Z_{in}(x) := \begin{cases} Z_{in\_o}(x) & \text{if } n_f = 0 \\ \left[ (Z_{in\_f}(x))^{-1} + (Z_{in\_o}(x))^{-1} \right]^{-1} & \text{otherwise} \end{cases}$$



### Paramètres du Haut-Parleur

$$S_d := (86.6 \cdot 10^{-4}) \quad Bl := 5.7 \quad R_e := 6 \quad C_{as} := 969 \cdot 10^{-10} \quad C_{ms} := 130 \cdot 10^{-5}$$

$$M_{ms} := 6.7 \cdot 10^{-3} - 1.8 \cdot \rho \cdot \frac{S_d^2}{3 \cdot \pi \cdot r_{hp}} \quad L_{es} := C_{ms} \left( \frac{Bl}{1} \right)^2 \quad r_{hp} := \sqrt{S_d \cdot (\pi)^{-1}} \quad r_{hp} = 0.053$$

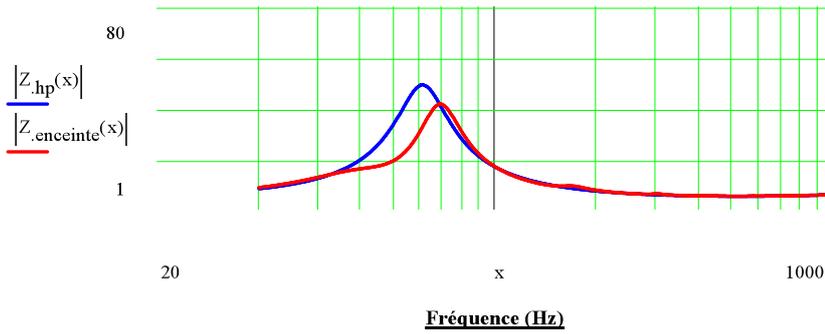
$$Q_{ms} := 3.49 \quad Q_{es} := 0.48 \quad M_{as} := \frac{M_{ms}}{S_d^2} \quad C_{es} := S_d^2 \cdot \frac{M_{as}}{Bl^2} \quad L_{ec} := 0.63 \cdot 10^{-3}$$

$$R_{ac} := \frac{Bl^2}{R_e \cdot S_d^2} \quad R_{es} := R_e \cdot \frac{Q_{ms}}{Q_{es}} \quad R_{ms} := \frac{Q_{es} Bl^2}{R_e \cdot Q_{ms}} \quad M_{a1} := 8 \cdot \frac{\rho}{3 \cdot \pi^2 \cdot S_d}$$

$$R_{as} := R_{ms} \cdot \frac{1}{S_d^2} \quad C_{asv} := C_{ms} \cdot S_d^2 \quad C_{as} = 9.69 \times 10^{-8} \quad R_{asv} := \frac{Bl^2}{S_d^2 \cdot (R_e + j \cdot L_{ec})}$$

$$Z_{hp}(x) := R_e + j \cdot \omega(x) \cdot L_{ec} + \frac{(Bl)^2}{(1 + j \cdot C_{ms} \cdot \omega(x))^{-1} + j \cdot M_{ms} \cdot \omega(x) + R_{ms} + S_d} \quad Z_{el}(x) := \frac{Bl^2}{Z_{in}(x) S_d^2}$$

$$Z_{\text{enceinte}}(x) := R_e + j \cdot \omega(x) \cdot L_{ec} + \frac{(Bl)^2}{(1 \cdot j \cdot C_{ms} \cdot \omega(x))^{-1} + j \cdot M_{ms} \cdot \omega(x) + R_{ms} + S_d^2 \cdot \left( \frac{8 \cdot \rho}{3 \cdot \pi^2 \cdot r_{hp}} \right) + Z_{in}(x) S_d^2}$$



### ACOUSTIQUE



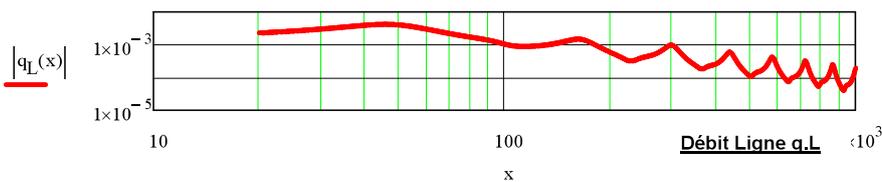
Distance de la source  $dis := 1.0$  Volts  $e_{\text{volt}} := 2.82$

**Impédance acoustique totale**  $Z_{at}(x) := (j \cdot C_{as} \cdot \omega(x))^{-1} + R_{as} + R_{ac} + j \cdot \omega(x) \cdot M_{as} + Z_{in}(x)$

**P. générale**  $P_g := e_{\text{volt}} \cdot \frac{Bl}{S_d \cdot R}$   
**Débit Hp open**

#### Débit q,d HP

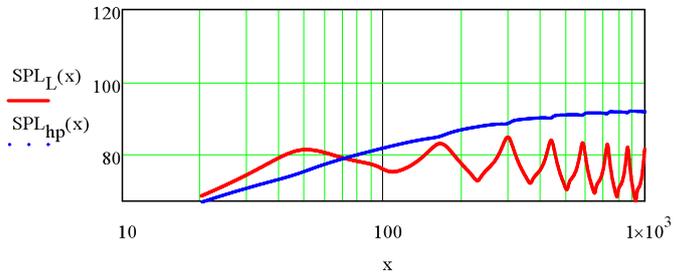
$$q_d(x) := \frac{P_g}{Z_{at}(x)} \quad U_o(x) := \begin{cases} q_d(x) & \text{if } n_f = 0 \\ \frac{q_d(x)}{1 + \frac{Z_{in_o}(x)}{Z_{in_f}(x)}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad q_L(x) := \frac{U_o(x)}{(C_o(x)) \cdot Z_L(x) + D_o(x)}$$



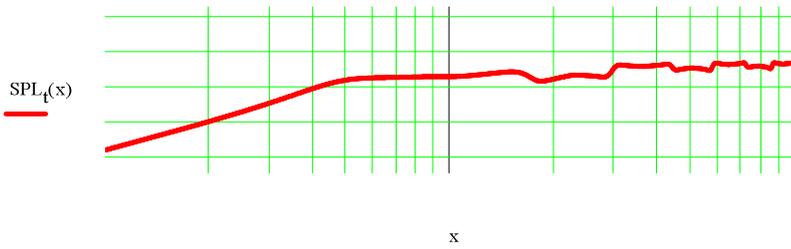
**P. axiale HP**  $P_d(x) := \frac{\rho \cdot c \cdot q_d(x) \left( \exp(-j \cdot k(x) \cdot dis) - \exp\left(-j \cdot k(x) \cdot \sqrt{dis^2 + \frac{S_d}{\pi}}\right) \right)}{S_d}$

**P axiale Ligne** 
$$P_L(x) := \frac{\rho \cdot c \cdot q_L(x) \left( \exp(-j \cdot k(x) \text{dis}) - \exp\left(-j \cdot k(x) \cdot \sqrt{\text{dis}^2 + \frac{S_L}{\pi}}\right) \right)}{S_L}$$

***SPL HP*** 
$$SPL_{hp}(x) := 20 \cdot \log\left(\frac{|P_d(x)|}{2 \cdot 10^{-5}}\right)$$
      ***SPL Ligne*** 
$$SPL_L(x) := 20 \cdot \log\left(\frac{|P_L(x)|}{2 \cdot 10^{-5}}\right)$$



***SPL Total*** 
$$SPL_t(x) := 20 \cdot \log\left(\frac{|P_d(x) - P_L(x)|}{2 \cdot 10^{-5}}\right)$$



# Bibliographie

- [1] Augspurger. Loudspeakers on damped pipes. *J. Audio Eng. Soc.*, 2000.
- [2] Backman. A computational model of transmission line loudspeakers. *AES*, 1992.
- [3] Bayley. A non resonant loudspeaker enclosure design. *Wireless Word*, 1965.
- [4] Bayley. The transmission line loudspeaker enclosure. *Wireless Word*, 1972.
- [5] L. L. Beranek. *Acoustics*. New York : McGraw-Hill, 1954.
- [6] Bradbury. The use of fibrous materials in loudspeaker enclosures. *Journal of the audioengineering Society*, 1976.
- [7] A. Chaigne. *Ondes acoustiques*. Ellipses, 2001.
- [8] J. Jouhaneau. *Notions élémentaires d'acoustique*. Éditions Tec et Doc Cnam, 2000.
- [9] J. M. King. Quarter wave.
- [10] J.M. King. *quarter wave*. [www.quarterwave.com](http://www.quarterwave.com), 2006.
- [11] Locanthi. Application of electric circuit analogies to loudspeaker design problems. *J.AudioEng.Soc*, 1971.
- [12] B. Olney. A method of eliminating cavity resonance, extending low frequency response and increasing acoustical damping in cabinet type loudspeakers. *J. Acoust. Soc.Amer.*, 1936.
- [13] W. S. Rayleigh. *Theory of Sound*. 1877-1878.
- [14] V. Tarnow. Airflow resistivity of models of fibrous acoustical materials. *J. Acoust. Soc. Amer*, 1996.
- [15] V. Tarnow. Fiber movements and sound attenuation in glass wool,. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1999.